

ORSAY

n° d'ordre : 5022

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

Thierry MARTIN

TITRE : INVERSION BAYÉSIENNE DU PROBLÈME NON LINÉAIRE DE
TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE
MODÉLISÉ PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS

Soutenue le **mercredi 26 novembre 1997** devant la commission d'examen

| | | |
|------|---------------|-------------------|
| MM. | M. BONNET | |
| | J.M. CHASSERY | <i>Rapporteur</i> |
| | G. DEMOMENT | |
| Mme. | L. GARNERO | <i>Rapporteur</i> |
| MM. | J. IDIER | |
| | D. LESSELIER | <i>Président</i> |

À Marie,
À mes parents,

Une théorie scientifique valable est capable d'être résumée, sous une forme simplifiée mais sans déformation, en un langage clair et universellement accessible. L'idéologie ne peut soutenir une pareille mise à nu sans risquer de perdre l'effet magique qui est attendu d'elle. À côté des exposés populaires de propagande, il faudra donc composer d'autres exposés qui leur serviront de garantie et de caution. Ils ne différeront pas des premiers par la profondeur ou l'extension, mais par l'obscurité. Toujours le mot rigueur se rencontrera à chaque page. [...] Ce dont la pensée idéologique veut faire l'économie, c'est de tout ce qui, dans l'activité scientifique véritable, repose sur une résolution du complexe d'Œdipe : l'angoisse de la recherche, la prise en compte du savoir passé, la patience et le respect des délais, l'acceptation de l'incomplétude.

Marie-Joseph LE GUILLOU, O.P, in *Le Mystère du Père*.

Remerciements

Jérôme m'a accueilli et encadré depuis le stage de DEA. Ses conseils judicieux, ses encouragements et la confiance qu'il m'a apportés ont constitué un précieux soutien dans la conduite de ce travail. Grâce au CDD qu'il m'a proposé, j'ai pu achever plus sereinement cette thèse. Qu'il reçoive ici l'expression de toute ma reconnaissance (et tous mes encouragements pour la suite de sa carrière d'en-saignant chercheur au GPI). Je tiens à remercier Guy de m'avoir lancé à l'abordage des problèmes inverses au sein du GPI et d'avoir un moment délaissé la barre du *Malloh Ru* pour celle du labo afin de faire naviguer le LSS aussi paisiblement que possible sur les eaux houleuses du SPI. Avec Hervé, nous sommes partis simultanément à l'assaut de la forteresse du non linéaire. Nos discussions sur les aspects communs de nos thèses respectives ont été fructueuses. Par ailleurs, souvent râlant mais sauveteur à l'heure (et en définitive rarement 13 NRV), Hervé a fait preuve d'un grand dévouement (bientôt dévotion?) au service de tous (bientôt d'un seul?!). Je veux lui témoigner ici toute ma gratitude.

Dominique Lesselier a accepté de présider la commission d'examen. Je lui adresse mes sincères remerciements, ainsi que pour ses efforts méthodiques de relecture scientifique et syntaxique de ce manuscrit. Line Garnerio s'est montrée très intéressée par ce travail. Son rapport témoigne d'une lecture méticuleuse et je lui en suis reconnaissant. Je le suis également envers Jean-Marc Chassery qui a su passer habilement à travers les *mailles* de ce « dense » manuscrit pour en souligner, dans son rapport, le cœur de la contribution scientifique. Merci (et chapeau) à Marc Bonnet pour le grand intérêt qu'il a manifesté pour ce travail ainsi que pour le rapprochement méthodologique des problèmes inverses de la mécanique et de l'électromagnétique. Enfin, merci à Jean-Claude Trouillet d'avoir contribué à structurer plus « bayésiennement » mon identité psychologique.

Merci à Gio et à Dub d'avoir tracé une voie pour les *Enséarques* au labo. Merci à JFB pour ses dépannages encyclopédiques sur les PC et bravo pour son talent dans la création de sigles. Merci à Christian et Andréa d'avoir sonorisé l'atmosphère de l'équipe par leurs joutes. Bravo à Mila et à Maï d'avoir réussi à laisser croire aussi longtemps que la mixité pouvait exister au GPI! Bravo à StefB pour ses efforts méritoires en faveur de la relance des industries du crayon, à GLB pour sa préférence de la porcelaine à la terre cuite et à Caro pour sa persévérance à essayer de rapprocher les différents étages du labo. Félicitations à StefG pour sa contribution à la fusion des identités alsaciennes et parisiennes. Merci à Champ pour son approche capillicole de la recherche et à Ali, digne *globe trotter* de l'équipe. Je tiens aussi à remercier les membres de la génération montante, Marc, Philippe, Charles, et leur souhaite de persévérer paisiblement jusqu'à la délivrance (de leurs diplômes).

Mention spéciale pour Pierre, illustre agitateur des cafés de l'angélus et des vêpres. Merci à Odile pour son action, à la foi(s) dévouée et résolue, en faveur de la recherche fondamentale. Merci aux thésards de l'aile Nord-Sud pour leur adhésion au GPI*view* et leurs participations à quelques fiévreux *Xblast*. Merci à l'équipe de l'administration : Yvette, Laurence, Jeannine, Marianne, Hélène et Solange ainsi que les informaticiens Marc, Laurence et Jacques. Merci à Pierre Bertrand de m'avoir accueilli au sein du LSS et à Daniel Claude d'avoir insisté auprès du rectorat pour que j'obtienne finalement les six derniers mois de financement sans lesquels ce travail eût été amputé. Enfin, je tiens à remercier Andrew Adler de l'IGB de m'avoir fourni les codes des maillages circulaires utilisés pour cette étude.

AVANT-PROPOS

PRÉSENTATION DU PROBLÈME DE TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE

1 Introduction

LA TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE (TIÉ) consiste, au moyen d'électrodes, à injecter des courants dans un corps et à recueillir les tensions résultantes sur son pourtour, afin de pouvoir déterminer la distribution de conductivité de ce corps.

Bien qu'également utile en contrôle non destructif, la plupart des applications et des recherches concernant ce moyen d'investigation se trouvent en imagerie biomédicale. En effet, il existe des contrastes de conductivité importants à l'intérieur du corps humain, principalement dus à des différences de salinités entre les liquides contenus dans les organes ainsi que ceux situés entre ces derniers. On trouve ainsi des applications pour l'imagerie des poumons telles que la détection d'épanchements de la plèvre, d'embolies, d'œdèmes et la surveillance respiratoire dans des unités de soins intensifs. D'autres utilisations sont aussi envisagées comme la détection de tissus cancéreux (en particulier pour les tissus mammaires) ainsi que la surveillance de changements physiologiques comme le cycle cardiaque. Comparée à d'autres méthodes d'imagerie telles que la tomographie à rayon X, l'imagerie par résonance magnétique (IRM), la TIÉ fait figure de parent pauvre car la résolution qu'elle offre est bien moindre. Toutefois, sa mise en œuvre matérielle est plus aisée, plus économique (et souvent moins dangereuse pour le patient). De plus, il faut noter que la connaissance de la distribution de conductivité constitue un apport de renseignement complémentaire par rapport aux techniques d'imagerie plus traditionnelles.

La TIÉ est aussi utilisée en prospection géophysique. Les *latérologues* des compagnies pétrolières contiennent en particulier des électrodes destinées à l'analyse aquifère ou pétrolifère des milieux souterrains.

2 Contexte historique

Les aspects et les orientations de la recherche en TIÉ sont variés. De nombreuses études s'attachent à améliorer les instruments nécessaires à l'acquisition des observations : les

générateurs de courants, les électrodes et l'interfaçage informatique. D'autres se consacrent à l'étude théorique des propriétés des solutions des équations modélisant l'expérience. Enfin, d'autres, s'appuyant en particulier sur les résultats des précédents, « traitent » les signaux collectés lors de l'expérience et proposent des méthodes de reconstruction de la distribution de conductivité recherchée. Cette subdivision en trois domaines de la recherche en TIÉ, (instrumentation, mathématique et traitement des signaux) n'est pas une simple vue de l'esprit. Certes, il est clair que celui qui effectue l'expérience envisage un estimateur de la conductivité, et que le théoricien ne manque pas de suggérer des algorithmes de reconstruction (*cf.* par exemple [Kohn et McKenney 1990]). Cependant, la difficulté intrinsèque du sujet, la variété des approches pratiques envisageables (injections de courant continu ou alternatifs, utilisation de courants induits...) n'ont pas permis, à proprement parler, la constitution d'une communauté « unifiée » de TIÉ¹.

Du côté expérimental, les travaux fondateurs datent des années 70 (avec par exemple [Tasto et Schomberg 1978]). Les auteurs proposent principalement, pour obtenir leurs reconstructions, d'utiliser des méthodes de *retroprojections*. Sur le plan théorique on peut remonter beaucoup plus tôt dans le temps puisque, nous le verrons, le problème revient à résoudre une équation aux dérivées partielles elliptique. Toutefois, les recherches mathématiques avancées, concernant directement la TIÉ ne débutèrent que dans les années 80. Si ces travaux apportent des résultats théoriques importants sur le caractère *mal-posé* du problème (*cf.* chapitre II), leur portée pratique en vue d'un traitement numérique demeure limitée car elle ne prend pas en compte les instabilités numériques résultant de la précision limitée des calculateurs. En 1987, Yorkey *et al.* s'appuient sur la *minimisation d'un critère des moindres carrés* pour estimer la conductivité. L'avènement de moyen de calculs puissants permet en effet de mettre en place un traitement présenté sous une forme *algébrique*, en particulier grâce au développement des *méthodes d'éléments finis* (MÉF). En 1990 apparaît l'ouvrage [Webster 1990] qui constitue un premier et remarquable effort de synthèse pour les applications dans le domaine². Dans [Hua et coll. 1991], les auteurs, relevant le caractère *mal posé* du problème de TIÉ, introduisent un terme de régularisation dans leur méthode d'estimation. Toutefois, cette régularisation, qui apparaît pour pallier les instabilités numériques, s'avère limitée car elle n'est pas employée explicitement en vue d'introduire des informations *a priori* susceptibles d'améliorer la résolution du problème. C'est au moment où débute cette étude en 1994 qu'apparaissent avec [Cohen-Bacrie 1994], dans le cadre de l'approximation linéaire du problème, des méthodes de régularisation bayésiennes. Leur utilisation, désormais classique pour les problèmes linéaires d'estimation, permet en effet de satisfaire simultanément l'exigence de stabilité pour obtenir des méthodes robustes d'estimation d'une part et la possibilité d'introduire des informations *a priori* pour améliorer la qualité de l'estimation d'autre part.

1. Des efforts dans ce sens ont été entrepris récemment avec la création d'un site *internet* spécifiquement dédié à la TIÉ : <http://www.physiol.ucl.ac.uk/eit/index.html>

2. Le lecteur pourra en particulier s'y référer pour obtenir une première liste de groupes actifs travaillant sur le sujet à cette date.

3 Cadre scientifique et motivations de l'étude

La présente étude s'inscrit dans l'activité du Groupe Problème Inverse (GPI) du Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS). Cette activité porte en particulier sur l'étude de méthodes de résolution de problèmes inverses mal-posés. En traitement de données expérimentales, on dispose de données numériques témoignant, de manière indirecte et souvent déformée et incertaine, d'un milieu que l'on cherche à caractériser. En règle générale, on est capable, à partir d'une modélisation physique du phénomène observé, de simuler les observations à partir d'entrées connues et ce, souvent avec une relativement bonne fiabilité. C'est la résolution du *problème direct*. Nous nous y intéressons en vue de résoudre le *problème inverse* qui consiste à retrouver l'entrée à partir de la sortie (et qui est beaucoup plus délicat à résoudre). Le point de vue problème direct/problème inverse n'est pas particulier à des domaines d'applications spécifiques. Il peut permettre d'approcher de nombreux problèmes de traitement de signaux réels. Le caractère mal-posé peut provenir, soit d'une insuffisance de données observées, soit d'une instabilité intrinsèque caractérisée par le modèle. Les données ne permettent pas, dès lors, de reconstruire l'objet initial. Une manière désormais répandue de résoudre ce type de problème consiste à *régulariser*: l'introduction d'une information *a priori*, dans le cadre d'une approche bayésienne par exemple, permet, sinon de trouver la solution exacte de l'inversion, du moins de proposer des reconstructions situées à l'intérieur d'une classe de *solutions admissibles*. La conception théorique de méthodes d'inversion et leur mise en œuvre algorithmique sont un des axes de recherche privilégiés au sein du GPI.

Nous nous intéressons ici à un cas particulier de TIÉ : la reconstruction bidimensionnelle d'objets fermés, soumis à des courants continus (ou basse fréquence). Les motivations de ce travail sont les suivantes :

- Une analyse bibliographique succincte révèle que la résolution des méthodes de reconstruction développées en TIÉ jusqu'alors ne permettaient pas, en pratique, de faire mieux que *détecter* des défauts d'homogénéité à l'intérieur du milieu analysé. De fait, le problème commence seulement à être envisagé sous l'angle *problème inverse mal posé*. Une analyse du caractère mal-posé du problème, ainsi que l'introduction, dans le cadre bayésien, d'une régularisation judicieuse, laissent entrevoir une amélioration notable de la résolution ;

- Ce problème s'inscrit dans un nouvel axe de recherche au sein du GPI, initié dès 1993 avec la présente étude en TIÉ ainsi que celle d'Hervé Carfantan en tomographie de diffraction ([Carfantan 1996]) : le développement de méthodes de reconstruction associées à des problèmes directs *non linéaires*. En TIÉ, cette non linéarité est liée au caractère non rectiligne des lignes de courant pénétrant dans le milieu conducteur. En règle générale, la prise en compte de phénomènes non linéaires est plus coûteuse en moyen de calcul. Toutefois, l'augmentation de la puissance des calculateurs ainsi que le choix de méthodes adaptées (telles que la MÉF en TIÉ) permet désormais d'envisager de telles études. En

particulier, dans le milieu industriel, on observe un intérêt croissant pour des méthodes d'imagerie par courant de Foucault ou de tomographie d'impédance pour des domaines infinis.

– Dans [Tarantola et Valette 1982], l'auteur estime que, pour la résolution de problèmes inverses, l'étape de discrétisation doit apparaître le plus tard possible et ne doit pas servir pour le développement des calculs. Ce point de vue apparaît comme une réponse sensée aux arguments de Rutherford pour lequel : « *qualitative is nothing but poor quantitative.* » Il apparaît en effet que les aspects analytiques de la modélisation contiennent des informations *qualitatives* importantes (en TIÉ, ce sont des informations de continuité, différentiabilité, ellipticité...) qui sont susceptibles de disparaître au cours d'une étape de quantification numérique telle que la discrétisation. Nous adoptons cependant ici un point de vue différent. En effet, les données de l'expérience sont d'abord des données quantifiées. Ensuite, pour un problème inverse non linéaire tel que la TIÉ, les traitements effectués à partir de considérations analytiques sont limités à quelques cas très simples. De plus, l'utilisation de méthodes de résolutions numériques d'équations aux dérivées partielles, telles que la MÉF, limite les erreurs de discrétisation, tout en offrant une capacité d'adaptation leur permettant de « coller au plus près » à la réalité expérimentale. Enfin, l'utilisation de la régularisation permet, par l'introduction d'informations qualitatives *a priori*, de rectifier finalement le *déficit qualitatif* dû à la discrétisation, tout en facilitant la convergence des méthodes d'estimation. Mentionnons toutefois (*cf.* les études de Tikhonov ou de Nashed) que la théorie de la régularisation n'est pas limitée à l'étude de problèmes discrets. Néanmoins, le cadre algébrique discret permet d'éviter celui de la minimisation fonctionnelle qui, s'il s'avère nécessaire à la construction du problème direct (*cf.* chapitre II), semble en revanche d'un emploi plus délicat pour la résolution du problème inverse provenant d'une modélisation directe non linéaire tel que la TIÉ.

4 Expérience de tomographie d'impédance électrique

Dans ce travail, nous nous consacrons à l'étude de la TIÉ dans le cadre de l'hypothèse quasi-statique (les courants imposés sont de très basse fréquence et sont modélisés comme des courants continus). La modélisation est opérée sur un objet de taille finie, en dimension 2, ce qui suppose que le milieu étudié possède une certaine symétrie cylindrique. De plus, la conductivité du milieu est supposée isotrope.

Nous nous limitons ici à une expérience comportant des relevés de tensions et de courants sur la seule face externe de l'objet (même si où l'objet est creux, il n'y a pas d'électrodes à l'intérieur). En pratique, les expériences peuvent être menées à partir d'une ceinture d'électrodes entourant l'objet (*cf.* Fig. .1) ou bien de quelques électrodes seulement, imposant les courants et mesurant les potentiels, auquel cas leur déplacement autour de l'objet et l'utilisation du théorème de superposition permettent de se ramener à des distributions de courant et de tension générées « continûment » autour de l'objet. Nous

revenons sur ce point au début du chapitre III.

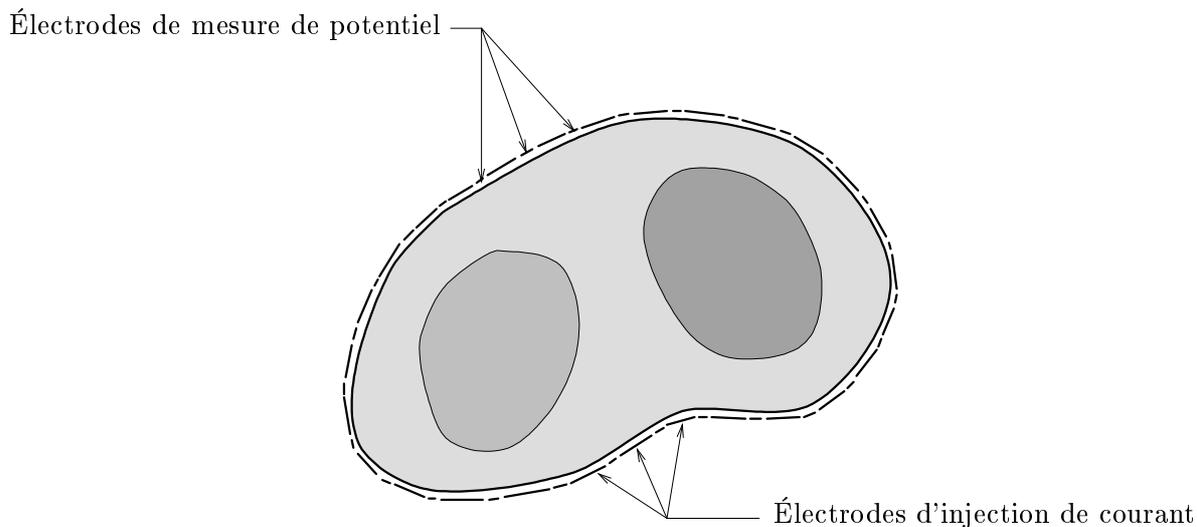


FIG. .1 - L'expérience de TIÉ considérée consiste à imposer des courants et à mesurer des tensions autour du milieu dont on cherche à reconstruire la distribution de conductivité. On peut, par exemple, utiliser une ceinture d'électrodes (schématisée par la ligne tiretée) comportant alternativement des électrodes d'injection de courant et des électrodes de mesure de potentiel.

5 Plan de l'étude

Nous présentons ici notre étude en deux parties. Dans la première partie, nous nous consacrons à la formalisation du problème en présentant les différentes étapes de modélisation du problème direct et du problème inverse. Pour construire le simulateur numérique du problème direct, nous utilisons la MÉF. Un des freins à l'utilisation de la MÉF est qu'elle nécessite des outils informatiques adaptés pour être mis en œuvre aisément par l'utilisateur. Ainsi, la décennie 80 a vu apparaître nombre de logiciels tels que *Modulef*, spécialement dédiés à la résolution par la MÉF d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. L'inconvénient de ces outils est qu'ils apparaissent comme des « boîtes noires », peu souples pour être utilisées directement pour la résolution de problèmes inverses. La MÉF est un outil désormais couramment utilisé en TIÉ. Notre contribution dans le présent travail, outre notre propre mise en œuvre de la MÉF en TIÉ, réside essentiellement dans les points suivants :

- Montrer, de manière quantitative et qualitative, que la MÉF fournit un modèle direct (ou simulateur) du problème de TIÉ possédant un excellent rapport précision/coût de calcul ;
- Donner une formulation algébrique de ce modèle direct MÉF qui soit spécifiquement adapté à la résolution du problème inverse. En particulier, nous mettons en avant

la dépendance linéaire la matrice de rigidité du problème par rapport au vecteur des conductivités, ce qui s'avère primordial pour la seconde partie de notre travail.

Ceci nous permet de mettre en œuvre simplement nos méthodes sur un logiciel de calcul algébrique courant tel que *Matlab*. Réciproquement, nous montrons comment les principes généraux de résolution des problèmes inverses, tels que l'analyse bayésienne, s'adaptent parfaitement à l'utilisation d'un modèle direct construit par MÉF. En particulier, l'utilisation « traditionnelle » des champs de Markov sur des pavages cartésiens est ici transposée à la structure triangulaire des maillages adoptés pour la discrétisation MÉF.

Dans une seconde partie, nous commençons par mettre en œuvre une méthode d'estimation de type *maximum a posteriori* (MAP). Nous nous appuyons sur la formulation du problème direct établie dans la première partie pour donner une formule algébrique simple du gradient des observations par rapport à la conductivité. Disposant de ce gradient, nous construisons, pour déterminer le MAP, une méthode d'optimisation adaptative efficace appelée *gradient pseudo-conjugué*. Les résultats obtenus par simulation attestent l'amélioration significative des estimations obtenues, aussi bien du point de vue de l'efficacité algorithmique que pour la qualité et la robustesse des reconstructions. Dans un chapitre plus prospectif, nous établissons une autre modélisation du problème direct, appelée *modélisation jointe*, permettant de préciser la nature de la non-linéarité du modèle direct : celui-ci apparaît alors comme un problème direct *bilinéaire sous contrainte bilinéaire*. Nous tirons dès lors parti de ces propriétés, ainsi que du caractère creux de la matrice de rigidité du problème, pour construire une méthode d'estimation originale en TIÉ appelée MP-EGP : estimation de la *moyenne a posteriori* (MP) fondée sur une méthode d'échantillonnage de Gibbs pondéré (EGP).

Première partie

Formalisation du problème inverse de tomographie d'impédance électrique

LA RÉOLUTION du problème inverse de *tomographie d'impédance électrique* (TIÉ) fait appel à un certain nombre d'outils méthodologiques, analytiques et algébriques. Ces outils sont habituellement développés et utilisés dans des communautés scientifiques spécifiques et distinctes de sorte qu'il nous a semblé important d'en présenter une synthèse, en trois chapitres, spécifiquement orientée vers la TIÉ.

Nous commençons, dans le chapitre I, par présenter le cadre méthodologique général de traitement de données numériques expérimentales dans lequel nous nous plaçons par la suite. Nous présentons d'abord les différentes étapes intervenant dans la construction du modèle numérique des observations. Puis nous rappelons les difficultés propres à la résolution des problèmes inverses (en particulier dans le cas d'un modèle non linéaire comme la TIÉ) et les méthodes de régularisation utilisées dans les méthodes d'estimation de l'objet recherché.

Les deux chapitres qui suivent détaillent la construction du modèle direct utilisé pour l'inversion dans la seconde partie de cette étude. Dans le chapitre II, nous présentons, à partir des équations de la physique, la modélisation analytique couramment utilisée en TIÉ. Nous voyons en particulier qu'il n'existe pas d'expression explicite permettant de résoudre le problème direct. L'emploi d'une approximation algébrique de ce modèle est donc nécessaire, d'autant que nos travaux se situent dans le cadre de traitement de données numériques. Dans le chapitre III, nous détaillons donc la résolution algébrique du problème direct de TIÉ par la *méthode des éléments finis* (MÉF). Nous soulignons les propriétés de cette modélisation ainsi que sa très bonne capacité d'intégration dans le cadre des méthodes algébriques de résolution de problèmes inverses d'imagerie. En particulier, nous montrons que l'utilisation de l'approximation MÉF que nous préconisons en TIÉ réalise un excellent compromis entre la précision numérique et la facilité de calcul pour être utilisable efficacement dans les méthodes d'inversion.

CHAPITRE I

MÉTHODOLOGIE DE LA MODÉLISATION ET DE L'ESTIMATION POUR LES PROBLÈMES INVERSES

1 Introduction

DANS CE CHAPITRE, nous donnons le cadre méthodologique général dans lequel nous nous plaçons pour résoudre le problème de *tomographie d'impédance électrique* (TIÉ). La problématique des problèmes inverses consiste à caractériser un milieu de manière indirecte (tomographie, contrôle non destructif...). Le but de ce traitement peut être *spéculatif*: il s'agit alors de (mieux) connaître le milieu en question (astronomie, imagerie satellitaire...). Le but du traitement peut aussi être *pratique*: dans ce cas, il s'agit pour l'utilisateur de prendre une décision (pour un chirurgien, opérer ou ne pas opérer, pour une compagnie pétrolière, forer ou ne pas forer...).

L'utilisateur dispose d'abord pour cela d'informations *a priori* (essentiellement qualitatives) traduisant ses connaissances et son expérience (en médecine, ce sont par exemple des connaissances anatomiques, en géologie, ce peuvent être, à partir de la nature des roches, des connaissances sur la stratification du milieu...).

L'utilisateur dispose ensuite d'informations quantitatives (ou numériques) résultant d'un phénomène naturel propre au milieu (rayonnement) ou d'un phénomène provoqué artificiellement sur le milieu (*e.g.*, une expérience de tomographie).

Certains de ces phénomènes fournissent des données brutes directement interprétables dans l'optique de l'utilisateur (c'est souvent le cas en photographie par exemple). Dans de nombreux cas néanmoins, les données brutes témoignent de manière *dégradée* [Demoment 1989] du milieu que l'on cherche à caractériser. C'est particulièrement le cas en TIÉ où la mesure de courants et de tensions à la surface d'un objet n'est pas directement interprétable pour caractériser son comportement résistif interne. Un traitement est alors souhaitable faisant intervenir un modèle numérique de cette dégradation physique. La mise en œuvre de ce modèle est appelée *résolution du problème direct*. Toutefois, le but du traitement est de « remonter » des données observées à la grandeur caractéristique : il s'agit de la *résolution du problème inverse*.

Enfin, dans un certain nombre de situations expérimentales, l'utilisateur a la possibilité d'influer sur le dispositif expérimental de façon à améliorer le traitement des données : on parle alors de *planification* ou d'*optimisation* d'expérience. Dans l'étude présente, nous nous situons dans le cadre d'un traitement de données *a posteriori*, *i.e.*, sans possibilité d'influer sur les entrées en cours d'expérience.

Dans le paragraphe 2, nous rappelons la terminologie et la méthodologie dans lesquelles nous construisons le problème direct aux chapitres II et III. Dans le paragraphe 3, nous présentons le cadre théorique bayésien dans lequel nous opérons la résolution du problème inverse en TIÉ.

2 Modélisation du problème direct

Nous présentons dans ce paragraphe le cadre de modélisation dans lequel nous construisons le problème direct de TIÉ, ou tout problème direct similaire. En effet, des difficultés supplémentaires apparaissent à cause du caractère *non linéaire* de la *modélisation algébrique* du problème direct. Ainsi, nous remarquons que des erreurs de discrétisations interviennent systématiquement et que les observations se répartissent entre des *entrées* et des *sorties*. Nous nous contentons ici de situer les quelques repères qui nous permettent de valider la construction du problème direct de TIÉ ou de tout autre problème similaire. Le lecteur désireux d'approfondir ces aspects pourra se reporter à [Kardestuncer et coll. 1987] ou à d'autres ouvrages de référence concernant la modélisation numérique de phénomènes physiques.

En traitement numérique de données expérimentales, la modélisation du problème direct consiste à construire un *simulateur numérique* de l'expérience. Le traitement étant effectué à partir de données brutes numériques, il est important, pour que la modélisation soit la plus fine possible, de modéliser complètement l'ensemble du dispositif à partir du vecteur contenant les entrées \mathbf{e}_{obs} jusqu'au vecteur de sortie \mathbf{s}_{obs} . Dans [Walter et Pronzato 1994], les auteurs appellent *entrées* les grandeurs par lesquelles l'utilisateur agit sur le dispositif expérimental (appelé par eux *système*) tandis que les *sorties* sont les autres grandeurs *observables* caractéristiques du système. Dans un premier temps, il semble que cette distinction entrée/sortie reflète une approche superficielle du phénomène puisqu'elle ne correspond pas forcément à un lien de causalité physique. Certes, en TIÉ, une description sommaire de l'expérience consiste à voir dans l'entrée des courants imposés par un opérateur extérieur et dans la sortie des tensions résultantes relevées sur l'objet. Toutefois, les interactions entre le générateur de courants, le milieu et les électrodes de mesure ont pour conséquence que les mesures sont ici les conséquences d'un équilibre ou d'un état de fait dont elles ne sont que le reflet numérique, et non d'une réelle causalité physique. Aussi, avant de donner un sens plus rigoureux aux mots entrées et sorties, et éventuellement mieux situer ces relations de causalité, nous établissons d'abord un modèle, que l'on élabore à partir des lois de la physique.

2.1 Les différents étages de la modélisation

Pour résoudre le problème inverse de TIÉ, nous partons du modèle direct analytique directement construit à partir des équations de la physique (*cf.* chapitre II). Il revient à résoudre une équation aux dérivées partielles non linéaire ne possédant pas de solution analytique explicite. Dès lors, l'étape de discrétisation constitue aussi une approximation qui fait apparaître une *erreur* dans la modélisation. De manière générale, la construction d'un simulateur numérique passe généralement par un étagement de plusieurs modèles, construits par étapes, chacune d'entre elles faisant intervenir ces *erreurs de modélisation* (*cf.* Fig. I.2). Il s'agit, pour construire ce simulateur numérique, de parvenir à un bon compromis entre la fidélité aux données observées d'une part et la souplesse d'emploi en vue de l'inversion d'autre part. Nous proposons donc ici trois étapes de modélisation pour construire le simulateur de TIÉ ou d'un problème direct non linéaire analogue. Ces étapes, définies à partir de la terminologie courante des *erreurs* mentionnées dans [Kardestuncer et coll. 1987], nous permettent de bien situer qualitativement et quantitativement les différentes erreurs qui interviennent dans la construction du problème direct de TIÉ aux chapitres II et III.

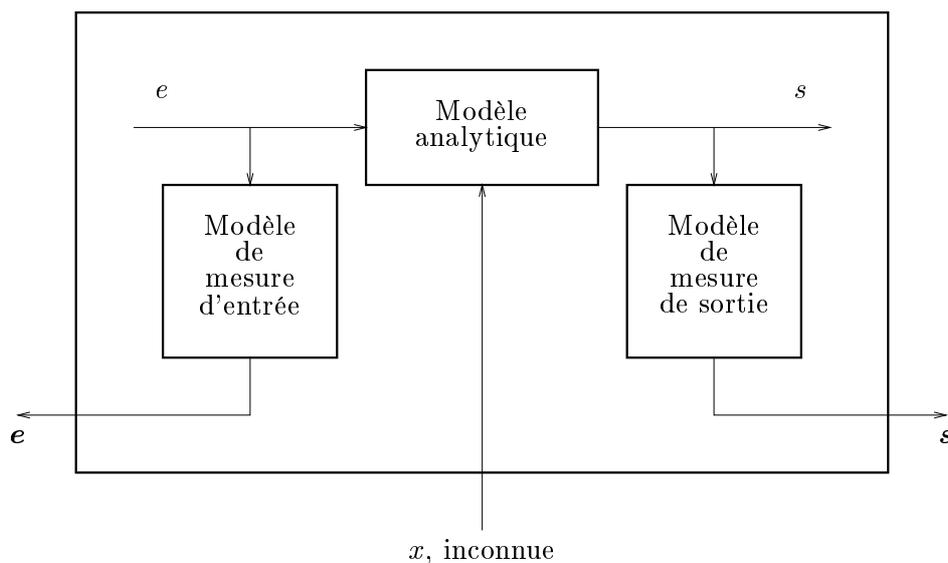


FIG. I.1 - Le modèle mathématique comprend, outre une description purement analytique du problème ($s = \mathcal{A}(e, x)$), des étages de modélisation des mesures numériques d'entrée et de sortie contenues dans les vecteurs \mathbf{e} et \mathbf{s} . Les entrées numériques \mathbf{e} sont « sortantes » pour ce modèle car elles constituent une particularisation de la distribution e .

– La première étape consiste à construire un *modèle mathématique*. Les lois de la physique auxquelles on fait appel font intervenir (la plupart du temps) des grandeurs continues. (En TIÉ, ce sont les équations de Maxwell et la loi d'Ohm, avec des grandeurs prenant des valeurs dans \mathbb{R} pour le courant et la tension, dans \mathbb{R}_+^* pour la conductivité). Le

lien entre ces différentes grandeurs est alors obtenu en résolvant une équation (équation différentielle, équation aux dérivées partielles...) reliant une distribution de sortie s à une distribution d'entrée e et à la grandeur caractéristique inconnue x :

$$s = \mathcal{A}(e, x), \quad (\text{I.1})$$

ce qui constitue un modèle purement *analytique*. Toutefois, les entrées et sorties observées étant numériques, cela implique qu'elles sont en nombre fini N_e et N_s et que chaque composante (réelle) est codée avec un nombre fini p d'entiers. Notons \mathbb{D}_p l'ensemble des nombres décimaux signés codables sur p entiers (comprenant mantisse et exposant). (La plupart du temps, les calculs sont effectués en double précision, *i. e.*, 16 chiffres significatifs pour la mantisse). Le modèle mathématique doit s'attacher à relier, par des étages de modélisation de mesure des entrées et des sorties numériques (*cf.* Fig. I.1) de sorte que le modèle utile s'écrive :

$$\mathbf{s} = \mathcal{A}_{\text{math}}(\mathbf{e}, x),$$

où $\mathbf{e} \in \mathbb{D}_p^{N_e}$ et $\mathbf{s} \in \mathbb{D}_p^{N_s}$ sont les vecteurs contenant ces entrées et sorties numériques. Pour la TIÉ au chapitre III § 2, nous choisissons pour ce modèle de mesure des points de e et s échantillonnés le long de leur support. Enfin, il apparaît nécessaire, pour faire coïncider le modèle mathématique avec les résultats expérimentaux, d'introduire une incertitude numérique $\mathbf{b}_{\text{math}} \in \mathbb{D}_p^{N_s}$, appelée *erreur de modélisation mathématique*, comblant les déficits du modèle mathématique de sorte que l'on peut écrire

$$\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathcal{A}_{\text{math}}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, x) + \mathbf{b}_{\text{math}}. \quad (\text{I.2})$$

Les déficits de ce modèle peuvent provenir de limitations propres aux lois de la physique mais aussi d'approximations ou d'hypothèses restrictives supplémentaires destinées à simplifier la modélisation.

– L'étape suivante dans la construction du simulateur consiste à discrétiser le modèle mathématique de façon à ce que l'inconnue x , approchée par une distribution x_{disc} , soit caractérisée par un nombre fini de variables réelles contenues dans un vecteur \mathbf{x}_{disc} . Dans le cas général où l'équation (I.2) n'est pas linéaire en x (ce qui correspond à la situation naturelle en TIÉ), l'équation (I.7) se réécrit :

$$\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{a}_{\text{disc}}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}_{\text{disc}}) + \mathbf{b}_{\text{disc}} + \mathbf{b}_{\text{math}}, \quad (\text{I.3})$$

où $\mathbf{a}_{\text{disc}}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}_{\text{disc}}) \in \mathbb{R}^{N_s}$ est un vecteur dépendant non linéairement du vecteur \mathbf{x}_{disc} . La *méthode des éléments finis* (MÉF), pour laquelle nous optons dans la suite en TIÉ (*cf.* chap. III), est une des méthodes de discrétisation envisageables dans ce cas.

– La troisième étape de la construction du simulateur consiste à implanter le modèle discrétisé complet sur ordinateur. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{D}_p^{N_x}$ (resp. $\mathbf{a} \in \mathbb{D}_p^{N_s}$) désigne l'approximation de \mathbf{x}_{disc} (resp. \mathbf{a}_{disc}) sur les calculateurs, la modélisation comprenant le simulateur numérique s'écrit :

$$\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) + \mathbf{b} \quad (\text{I.4a})$$

$$\text{avec } \mathbf{b} := \mathbf{b}_{\text{arr}} + \mathbf{b}_{\text{disc}} + \mathbf{b}_{\text{math}}, \quad (\text{I.4b})$$

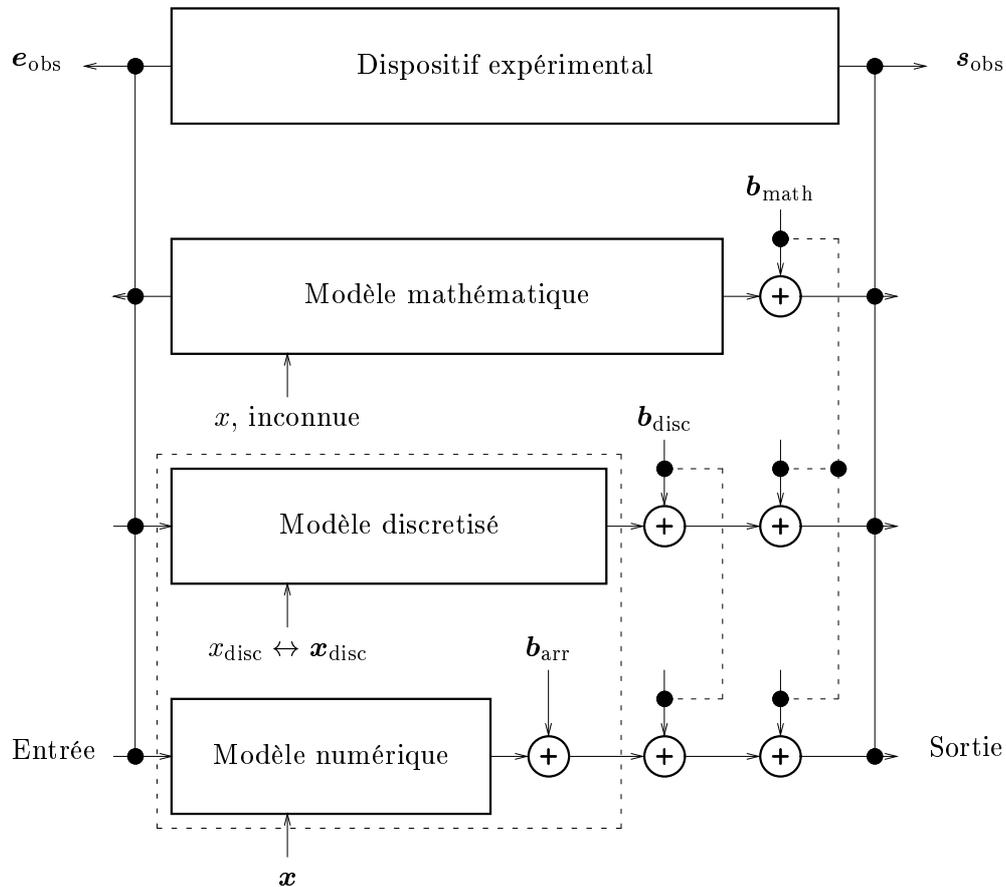


FIG. I.2 - *Étagement des différents modèles dans la construction du problème direct en vue de l'inversion. Les différentes étapes de la modélisation consistent à construire un vecteur numérique \mathbf{x} caractérisant l'inconnue x (inconnue au sens du problème inverse). \mathbf{b}_{math} désigne l'écart entre la sortie du modèle mathématique et les observations, \mathbf{b}_{disc} est l'erreur commise lors de l'étape de discrétisation et \mathbf{b}_{arr} est l'erreur d'arrondi intervenant lors de la mise en œuvre numérique sur ordinateur. L'erreur d'arrondi \mathbf{b}_{arr} étant souvent minime, on opère, lors de la mise en œuvre de l'inversion, une identification (indiquée en pointillés) du simulateur et du modèle discrétisé. La modélisation est donc d'autant plus précise que $\mathbf{b}_{math} + \mathbf{b}_{disc}$ est petit devant \mathbf{s}_{obs} . On remarquera que le vecteur \mathbf{e}_{obs} est schématisé par une flèche « sortant » du modèle mathématique et dispositif expérimental (toute mesure étant vue a priori comme une sortie d'un dispositif). En revanche, \mathbf{e}_{obs} apparaît « en entrée » pour les modèles discrétisés et numériques en tant que vecteur de données nécessaire au calcul du problème direct.*

où $\mathbf{b}_{\text{arr}} \in \mathbb{D}_p^{N_s}$ désigne les *erreurs d'arrondi* intervenant lors de cette mise en œuvre.

Remarque I.1 (Entrées et sorties).

Comme décrit sur la figure I.2, c'est la modélisation du problème direct qui permet de donner à certaines observations l'appellation d'*entrées* (celles qui sont arguments de \mathbf{a}) et de *sorties* (celles qui sont résultats de \mathbf{a}). Cette distinction est donc parfois purement fonctionnelle. Ainsi, en TIÉ, la modélisation analytique et l'utilisation de la MÉF pour la résolution du problème direct permettent de construire deux modèles directs dits *adjoints* ayant, pour le premier, en entrée les courants imposés et en sortie les tensions relevées tandis que c'est l'inverse pour le second. Dès lors, au regard de l'inconnue qui est la conductivité, les courants et les tensions jouent un rôle symétrique. Cette symétrie n'est rompue que par la nécessité de choisir un sens pour construire le modèle direct. En outre, il est important de souligner que le modèle direct constitue un modèle de *dégradation* non pas dans le sens $\mathbf{e}_{\text{obs}} \rightarrow \mathbf{s}_{\text{obs}}$ (entrée-sortie) mais dans le sens $\mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{s}_{\text{obs}})$ (inconnue-observations).

2.2 Pondération des erreurs de modélisation

Pour évaluer la précision du simulateur numérique, on utilise souvent le *rapport signal à bruit* (RSB) *en sortie* défini comme le rapport des puissances entre la grandeur utile et l'erreur de modélisation :

$$\text{RSB} := \frac{\|\mathbf{s}_{\text{obs}}\|_2^2}{\|\mathbf{b}\|_2^2}, \quad (\text{I.5})$$

où \mathbf{b} représente donc la prise en compte des trois erreurs (appelées encore *bruits*) mentionnées précédemment. Un modèle est donc précis si son RSB est élevé. L'imprécision du modèle peut toutefois être différemment répartie sur les erreurs.

En premier lieu en effet, dans la plupart des traitements, le simulateur est volontairement confondu avec le modèle discrétisé. Deux raisons majeures justifient cette identification :

- La première est que, grâce à la puissance des calculateurs, les erreurs d'arrondi \mathbf{b}_{arr} sont souvent négligeables, non seulement devant la sortie \mathbf{s}_{obs} mais aussi devant les autres erreurs \mathbf{b}_{disc} et \mathbf{b}_{math} . Dans le chapitre III, nous montrons que, lors de la modélisation MÉF en TIÉ, les erreurs d'arrondi sont négligeables devant les erreurs de discrétisation ;
- La seconde raison justifiant cette identification est qu'il est plus simple, pour le traitement, de raisonner avec un \mathbf{x} à valeur dans un espace continu ($\Lambda \subset \mathbb{R}^{N_x}$) que dans $\mathbb{D}_p^{N_x}$, afin de bénéficier d'éventuelles propriétés liées à une topologie du continu : convexité, différentiabilité... De plus, même si les résultats obtenus sont dans $\mathbb{D}_p^{N_x}$, ils sont souvent destinés à être interprétés dans un « continuum ».

Dans la suite, nous opérons cette même identification en écrivant :

$$\boxed{\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) + \mathbf{b}} \quad (\text{I.6})$$

avec $\mathbf{x} \in \Lambda$ et $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\text{disc}} + \mathbf{b}_{\text{math}}$. Or, pour effectuer ces traitements, nous voyons au paragraphe suivant que nous raisonnons sur des nappes continues (critères, densité de probabilités). La numérisation de \mathbf{x}_{disc} en \mathbf{x} revient donc à approcher ces nappes par un ensemble virtuel de points situés sur une « grille » extrêmement fine. Si cette approximation ne pose pas de problèmes lors de la mise en œuvre du problème direct, elle peut être source d'instabilité lors de la résolution du problème inverse à cause du caractère *mal posé* de ce dernier (cf. § 3.2).

Il est plus fréquent qu'une bonne part de l'imprécision de la modélisation provienne d'erreurs de discrétisation. Toutefois, moyennant quelques précautions, celle-ci peut s'avérer minime devant l'erreur de modélisation mathématique. Ceci est valable en particulier lorsque le modèle analytique est linéaire. Le modèle analytique se présente alors souvent sous une forme réduite ne comprenant pas d'entrée proprement dite :

$$s = \mathcal{A}x.$$

La discrétisation est souvent opérée à partir d'un échantillonnage à pas régulier de x sur son support \mathcal{T} :

$$x_{\text{disc}}(t_i) = \int_{\mathcal{T}} x(t_i)\delta(t - t_i)dt,$$

où les $t_i \in \mathcal{T}$, ($i = 1..N_x$), sont les N_x positions d'échantillonnage sur le support et δ désigne la distribution de Dirac sur \mathcal{T} . La distribution approchée x_{disc} est alors caractérisée par le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_x}$ contenant les valeurs $x(t_i)$ de sorte que la modélisation des observations s'écrit :

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (\text{I.7})$$

L'utilisation sous certaines conditions du théorème de Shannon suffit alors à garantir la caractérisation exacte de x par \mathbf{x} de sorte que $\mathbf{b}_{\text{disc}} = \mathbf{0}$. En TIÉ, l'utilisation d'un modèle analytique linéarisé peut permettre ainsi une réduction de l'erreur de discrétisation. Cependant, cette réduction d'erreur se reporte sur l'erreur de modélisation mathématique \mathbf{b}_{math} si bien que, le phénomène modélisé étant fortement non linéaire, l'erreur résultante \mathbf{b} demeure élevée. Dans le chapitre III, nous montrons que l'emploi de la MÉF pour la résolution du problème direct permet de garder le modèle analytique non linéaire provenant des équations de la physique en offrant une erreur de discrétisation suffisamment petite devant \mathbf{s}_{obs} .

Remarque I.2 (Position et signification du *bruit* dans le modèle).

Dans la modélisation du problème direct, nous avons choisi (cf. Fig. I.2) de placer *additivement* les erreurs de modélisation (souvent appelées *bruit*) \mathbf{b}_{arr} , \mathbf{b}_{disc} et \mathbf{b}_{math} devant

la sortie \mathbf{s}_{obs} . Une justification classique de ce choix consiste à affirmer que les mesures en sortie sont *plus bruitées* que les mesures en entrée. La portée de ce genre de raisonnement demeure toutefois assez limitée car il repose sur les hypothèses suivantes :

- L'utilisateur dispose d'une modélisation *numérique* \mathbf{a}' plus précise que celle qu'il utilise pour l'inversion (\mathbf{a}),

$$\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{a}'(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) + \mathbf{b}'$$

comprenant en particulier des modèles locaux d'incertitude sur les mesures d'entrée $\mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^e$ et de sortie $\mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^s$ de sorte que

$$\mathbf{a}'(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}} + \mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^e, \mathbf{x}) + \mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^s.$$

Cette modélisation plus élaborée permet de prendre en compte les effets d'éventuels *composants générateurs de bruits* inclus dans le dispositif expérimental (cf. [Webster 1990] en TIÉ). Il peut donc arriver que ces nouveaux étages soient des modèles probabilistes, étayés par une étude statistique ;

- Négliger le modèle local de mesure d'entrée $\mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^e$ a peu d'incidence sur la validité du modèle élaboré, ce qui revient à :

$$\mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}} + \mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^e, \mathbf{x}) \approx \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) ;$$

- En revanche, négliger le modèle local de mesure de sortie $\mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^s$ n'est pas une approximation valable, *i.e.*,

$$\mathbf{a}'(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) \not\approx \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}} + \mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^s, \mathbf{x}) ;$$

- Dans le cas du modèle élaboré, l'amplitude $\mathbf{b}' = \mathbf{b}'_{\text{arr}} + \mathbf{b}'_{\text{disc}} + \mathbf{b}'_{\text{math}}$ est négligeable devant $\mathbf{f}'_{\text{mes}}{}^s$, ce qui signifie que les erreurs d'approximation du modèle élaboré sont négligeables devant le bruit de mesure en sortie.

L'ensemble de ces hypothèses n'est pas toujours vérifié. En particulier en TIÉ, nous établissons au chapitre III que l'*erreur de résolution* définie par $\mathbf{b}_{\text{arr}} + \mathbf{b}_{\text{disc}}$ ($\approx \mathbf{b}_{\text{disc}}$) se situe entre 50 et 70 dB au dessous du signal de sortie tandis que la précision des mesures, selon [Webster 1990], se situe autour de 65 dB au-dessous du signal de sortie. Plus souvent, le choix de placer l'erreur de modélisation en sortie se justifie dans la mesure où il est plus simple, lors d'une modélisation, de faire intervenir «en bout de chaîne» la différence entre les observations et les simulations. Ce choix se justifie aussi *a posteriori* dans la mesure où la plupart des estimations en problèmes inverses s'effectuent plus simplement avec un modèle direct *bruité* additivement en sortie. Il est important de voir que, dans de nombreux cas, le bruit représente avant tout une incertitude, *i.e.*, un déficit de connaissance. Aussi est-il non seulement possible mais souhaitable de positionner cette « méconnaissance » de façon à faciliter les traitements qui suivent. Dès lors, on peut envisager des modélisations faisant intervenir l'incertitude de manière multiplicative, ou de la placer en entrée, voire de scinder le modèle numérique en deux blocs et de la positionner entre les deux. Ainsi, dans la seconde partie de notre travail, nous proposons deux positionnements différents des incertitudes pour l'estimation de la conductivité en TIÉ.

3 Résolution du problème inverse

De même que pour le problème direct, la résolution du problème inverse de TIÉ présente des difficultés spécifiques supplémentaires par rapport aux problèmes inverses dans lesquels le modèle direct est linéaire. Dans ce dernier cas, le cadre des méthodes de minimisation de critères ou le cadre probabiliste bayésien fournit déjà, pour la résolution de ces derniers, un certain nombre de méthodes d'estimation générales, lesquelles ne sont pas obligatoirement linéaires.

Dans ce paragraphe, nous reprenons ces deux cadres théoriques pour la résolution d'un problème inverse non linéaire tel que la TIÉ. Après une introduction en § 3.1 sur les méthodes non régularisées, nous montrons dans le § 3.2 que la caractérisation analytique du caractère mal posé d'un problème inverse tel que la TIÉ est insuffisante dans le cadre de méthodes d'estimation numériques. En distinguant d'une part les méthodes d'estimations (théoriques) et d'autre part, les algorithmes (numériques) destinés à leur mise en œuvre, il apparaît que la régularisation, si elle est souhaitable lorsqu'on veut améliorer la résolution, demeure de toute façon nécessaire pour fournir des estimateurs robustes. Le chapitre § 3.3 présente les méthodes de régularisation qui permettent de rester dans le cadre des méthodes de minimisation de critères ou le cadre probabiliste. Le lecteur familier avec ces méthodes d'estimation régularisées pour les problèmes inverses pourra se reporter directement au § 3.4, en particulier au § 3.4.1 dans lequel nous étudions l'influence d'une reparamétrisation sur les méthodes d'estimation et au § 3.4.2 dans lequel nous présentons l'utilisation de lois *a priori* markoviennes sur des pavages irréguliers, tels que les maillages triangulaires construits avec la MÉF. Étant donné la difficulté du problème inverse de TIÉ, nous nous contentons ici de proposer des méthodes d'estimation *bas niveau*.

3.1 Méthodes d'estimation non régularisées

Nous partons donc d'un modèle numérique des observations,

$$\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

où \mathbf{s}_{obs} et \mathbf{e}_{obs} sont les observations, la résolution numérique du problème inverse consiste à « remonter » à \mathbf{x} . Le premier obstacle pour cela réside dans l'incertitude \mathbf{b} qui caractérise le modèle. Il apparaît que la détermination *exacte* de \mathbf{x} n'est pas réaliste. C'est la raison pour laquelle on parle d'*estimation* de \mathbf{x} plutôt que de *détermination* de \mathbf{x} .

Pour les méthodes d'estimation non régularisées, on peut trouver (entre autres) deux types de justification théorique :

- Une justification par l'*adéquation aux observations*. Les méthodes d'adéquation aux observations essaient de caractériser l'inconnue \mathbf{x} par une norme $J_{\text{obs}}(\mathbf{x})$ mesurant la différence entre les observations et les simulations. On trouve en particulier dans [Nashed 1981]

et [Demoment 1989] la définition d'une classe de *solutions admissibles* \mathcal{X} donnée par :

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{s}_{\text{obs}} - \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{b}\|\}. \quad (\text{I.8})$$

– Une justification *probabiliste*. Les méthodes probabilistes visent à caractériser l'inconnue à partir de lois de probabilités qui reflètent des connaissances de l'utilisateur sur l'incertitude \mathbf{b} (en particulier, son amplitude par rapport aux grandeurs de sortie).

Ces deux types d'approches aboutissent à des méthodes très proches les unes des autres puisqu'il s'agit de caractériser la grandeur par une nappe multivariée, dans le premier cas à valeur dans \mathbb{R}_+ , dans le second à valeur dans $[0, 1]$. Dans chacune de ces approches, des *estimateurs ponctuels* peuvent fournir une estimée de \mathbf{x} . Historiquement, parmi les méthodes d'adéquation aux observations, ce sont les méthodes de *moindres carrés* qui sont apparues en premier. L'estimée \mathbf{x}_{est} y est définie comme minimisant une norme (ou critère) quadratique :

$$\mathbf{x}_{\text{est}} = \arg \min_{\mathbf{x}} J_{\text{obs}}(\mathbf{x}) \quad (\text{I.9})$$

$$\text{où } J_{\text{obs}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{s}_{\text{obs}} - \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x})\|^2. \quad (\text{I.10})$$

L'énorme avantage de la méthode des moindres carrés est de fournir un estimateur linéaire dans le cas où le modèle d'estimation est lui-même linéaire. Dans le cadre probabiliste, c'est la loi gaussienne qui a fourni les premiers modèles probabilistes d'incertitude :

$$f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b}; \sigma) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \exp\left\{-\frac{\|\mathbf{b}\|^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (\text{I.11})$$

où $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b}; \sigma)$ que nous abrègeons dans la suite $p(\mathbf{b}; \sigma)$, désigne la densité de probabilité (gaussienne) de la variable aléatoire \mathbf{B} en sa réalisation \mathbf{b} . Compte tenu de cette hypothèse gaussienne sur l'incertitude, on peut aisément construire la *vraisemblance* qui est la distribution donnée par

$$l(\mathbf{x}) := p(\mathbf{s}_{\text{obs}} | \mathbf{x}; \theta) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \exp\left\{-\frac{\|\mathbf{s}_{\text{obs}} - \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x})\|^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (\text{I.12})$$

i.e., la probabilité de la sortie observée \mathbf{s}_{obs} conditionnellement à l'inconnue \mathbf{x} , θ désignant les autres paramètres supposés connus (ici, σ , \mathbf{e}_{obs} et \mathbf{a}). L'estimation du *maximum de vraisemblance* qui s'écrit

$$\mathbf{x}_{\text{est}} = \arg \max_{\mathbf{x}} l(\mathbf{x}) \quad (\text{I.13})$$

est donc équivalent, avec une incertitude gaussienne, à l'estimation des moindres carrés (I.10). Dans ce cas particulier, l'apport de l'approche probabiliste dans la construction de l'estimateur ne semble pas significatif par rapport aux méthodes de minimisation de critères puisque la connaissance de l'écart type σ n'intervient pas dans l'estimation. Cette remarque s'étend de fait à toutes les méthodes de maximisation de vraisemblances ou de

probabilités qui ne nécessitent pas d'hypothèse sur la puissance de la loi de bruit pour être mises en œuvre.

Les méthodes non régularisées présentent toutefois deux inconvénients majeurs :

- Elles ne font pas intervenir les connaissances *a priori* (sur l'objet \boldsymbol{x}) dont dispose l'utilisateur et qui sont susceptibles de rendre plus précis les estimateurs ;
- Elles peuvent être délicates à mettre en œuvre numériquement en fournissant des résultats instables.

Ceci nous amène à parler du caractère *mal posé* des problèmes inverses puis de la résolution de cette difficulté par la *régularisation*.

3.2 Caractère mal posé du problème inverse

3.2.1 Fondements mathématiques

Les problèmes de stabilité inhérents aux problèmes inverses ont d'abord été étudiés dans le cadre du modèle analytique tel que nous l'avons présenté précédemment avec l'équation (I.1) :

$$s = \mathcal{A}(e, x).$$

Puisque \mathcal{A} représente un processus de dégradation entre x et (e, s) , il faut s'attendre à ce que cette perte d'information remette en cause au moins l'une des trois conditions suivantes qui définissent le caractère *bien posé* du problème inverse au sens de Hadamard (*cf.* [Demoment 1989]) :

Définition I.1 (Problème inverse bien posé au sens de Hadamard).

Le problème inverse défini à partir du modèle direct (I.1) est *bien posé* si les trois conditions suivantes sont remplies :

- *Existence*: $\forall(e, s)$, il existe un x tel que $s = \mathcal{A}(e, x)$;
- *Unicité*: $\forall(e, s)$, si $s = \mathcal{A}(e, x_1)$ et $s = \mathcal{A}(e, x_2)$, alors $x_1 = x_2$;
- *Stabilité* de x , *i.e.*, continuité de la solution x par rapport aux données (e, s) .

Dans [Nashed 1981], l'auteur met en particulier en évidence le caractère mal-posé (par défaut de stabilité) du problème inverse lorsque le problème direct s'écrit linéairement,

$$s = \mathcal{A}x \tag{I.14}$$

où \mathcal{A} (dépendant éventuellement d'entrées e) représente un opérateur de convolution de carré intégrable. La condition de stabilité semble parfois discutable dans le sens où l'on peut souhaiter, par exemple lorsque l'on cherche à reconstruire d'éventuelles discontinuités, que l'estimation puisse autoriser des variations discontinues des solutions par rapport aux données (on pourrait, par exemple, essayer d'introduire à la place une condition de

continuité presque partout). Une étude dans cette direction peut être envisagée avec la définition suivante du caractère mal posé [Hofmann et Scherzer 1994] :

Définition I.2 (Problème inverse localement mal-posé).

Le problème inverse défini à partir du modèle direct (I.1) est *mal posé* en x_0 si, pour toute entrée e , pour tout $r_2 > 0$, il existe un réel $r_1 > 0$ et une suite x_n dans l'anneau

$$B_{r_1}^{r_2} := \{x : 0 < r_1 < \|x - x_0\| < r_2 \leq \infty\} \quad (\text{I.15})$$

tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}(e, x_n) - \mathcal{A}(e, x_0)\| = 0$.

Cette définition revient donc à caractériser d'éventuelles non inversibilités locales de l'opérateur $\mathcal{A}(\cdot, x)$. Elle a été introduite dans [Hofmann et Scherzer 1994] dans le but d'essayer de caractériser un « degré » dans le caractère mal posé des problèmes inverses non-linéaires. Toutefois, en TIÉ, on peut montrer (*cf.* chapitre II pour plus de précision) que la formulation du problème inverse est bien posée au sens de Hadamard (*i.e.*, qu'il est partout localement bien posé). Or, l'analyse de la stabilité (*cf.* chapitre II théorème II.4) révèle que la continuité par rapport aux données est obtenue avec une pente infinie autour du point de variation, ce qui laisse présager une grande instabilité lors de la résolution numérique du problème inverse de TIÉ. Le caractère localement bien posé ou globalement bien posé au sens de Hadamard n'est donc pas une garantie de stabilité pratique pour l'inversion. Dans [Nashed 1981], l'auteur essaie de donner une définition plus pratique du caractère mal posé en faisant apparaître implicitement une incertitude b sur le modèle analytique

$$s = \mathcal{A}(e, x) + b \quad (\text{I.16})$$

et en introduisant à partir de là une définition du caractère mal-posé au sens des *moindres carrés* afin d'intégrer K jeux de données bruitées différents (s_i, e_i) $i = 1, \dots, K$. Toutefois, même dans cette perspective, la notion de stabilité demeure définie de façon *binnaire* alors que, lors de la résolution numérique, les vitesses de convergence extrêmement faibles des algorithmes s'apparentent à des degrés d'instabilité. Il semble donc préférable d'essayer de caractériser le caractère mal posé du problème à partir du modèle numérique (I.4).

3.2.2 Algorithmes utilisés lors de la mise en œuvre de l'estimation

Pour cela, il est important de souligner qu'une grande partie des méthodes numériques d'estimation sont mises en œuvre avec des algorithmes *itératifs*, *i.e.*, qui vont « parcourir » la nappe¹ par une suite de points définis séquentiellement par :

$$\mathbf{x}_{n+1} = g(\mathbf{x}_n). \quad (\text{I.17})$$

1. le mot nappe désigne ici indifféremment le critère ou la densité de probabilité.

On peut regrouper ces algorithmes en trois catégories.

– Les algorithmes *déterministes*. Ils sont souvent décrits dans le cadre de minimisation de critères. Ils parcourent la nappe de façon déterministe en vue de converger vers un point particulier de la nappe (en général, un optimum). Par conséquent, seul le dernier point obtenu par l'algorithme est retenu comme résultat. Parmi ces algorithmes, on trouve (*cf.* [Press et coll. 1986], [Lascaux et Theodor 1987], [Bertsekas 1995]) les méthodes de descente coordonnée par coordonnée (*e.g.*, Jacobi, Gauss-Seidel qui sont aussi utilisées pour résoudre les systèmes linéaires), les méthodes du premier ordre (méthode de gradient, gradient conjugué) et du second ordre (méthode de Newton), les méthodes de point fixe... Ce sont des méthodes d'optimisation *locale* : elles convergent vers un optimum local (ou un point selle) de la nappe.

– Les algorithmes *stochastiques*. Si les algorithmes déterministes sont plus naturellement construits à partir d'un critère, les algorithmes stochastiques requièrent le cadre probabiliste pour être construites rigoureusement. Ces méthodes dites d'*échantillonnage stochastique* visent à décrire la densité de probabilité à partir de points échantillonnés par tirage pseudo-aléatoire selon cette densité. Parmi ces méthodes, celles qui fonctionnent itérativement selon (I.17) sont appelées « Markov chain Monte Carlo » (MCMC). Des générateurs pseudo-aléatoires sont donc nécessaires comme outil supplémentaire par rapport aux méthodes déterministes. En revanche, contrairement à celles-ci, le résultat peut ne pas se limiter au dernier point obtenu mais consister en un nuage de points caractérisant l'état stationnaire de la chaîne de Markov convergeant vers la loi à échantillonner. En particulier, à partir de ce nuage, on peut estimer des grandeurs statistiques de cette loi (moyenne, variance,...). On trouve parmi ces méthodes l'algorithme de Metropolis-Hastings (introduit dans [Metropolis et coll. 1953] et perfectionné dans [Hastings 1970]) et l'échantillonneur de Gibbs dont les fondements sont rappelés dans [Geman et Geman 1984].

– Les méthodes de *relaxation*. Ces méthodes font appel, pour leur mise en œuvre, soit aux algorithmes déterministes soit aux algorithmes stochastiques. Ces sont des méthodes qui cherchent à optimiser la nappe de manière globale à partir de déformations successives de celle-ci (dans le cas où elle possède des optima locaux). On trouve le *recuit simulé* (simulated annealing SA) qui est une méthode de relaxation stochastique : l'optimum est atteint par des échantillonnages successifs de la loi relaxée par un paramètre de température T (*cf.* [Geman et Geman 1984]). On trouve aussi des méthodes de relaxation déterministe comme la *non convexité graduelle* (GNC) qui cherche à minimiser un critère non convexe en minimisant localement une suite de critères déformés « continûment » dont le premier est convexe et dont le dernier est le critère à minimiser. Cette méthode a été développée dans [Blake et Zisserman 1987] en segmentation d'image et adaptée aux problèmes inverses dans [Nikolova 1995] et [Carfantan et Mohammad-Djafari 1995]². Si

2. La convergence théorique systématique du GNC vers l'optimum global de la nappe est exclue. Néanmoins, la pratique montre qu'elle permet, soit de l'atteindre, soit de s'en rapprocher grandement en aboutissant à un optimum local proche de l'optimum global, de manière souvent plus efficace que le SA.

ces méthodes revêtent un caractère global quand au type d'optimisation envisagée, elles gardent un caractère local en ne retenant comme résultat que le dernier point obtenu.

3.2.3 Causes d'instabilité algorithmique

Dans ces catégories d'algorithmes, le calcul d'un nouveau point $\mathbf{x}_{n+1} = g(\mathbf{x}_n)$ s'effectue à partir des propriétés de la nappe au point \mathbf{x}_n (gradient, hessien,...). Indépendamment de la pertinence de l'estimateur, c'est la capacité de la nappe à être optimisée avec précision (pour les méthodes de descente) ou visitée dans sa globalité (pour les méthodes d'échantillonnage) en un *temps fini* qui va caractériser la stabilité numérique du problème inverse.

Le cas le plus simple pour étudier l'instabilité numérique est celui où le modèle numérique est linéaire ($\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$) et où l'on utilise le critère des moindres carrés. L'instabilité du problème est alors entièrement caractérisée par la décomposition en valeurs propre du hessien du critère, *i.e.*, la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur \mathbf{A} ([Andrews et Hunt 1977], [Demoment 1989]). Si l'opérateur est singulier, il n'y a pas unicité de la solution du système linéaire $\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ce qui correspond à des hyperplans de minima (resp. de maxima) pour le critère (resp. pour la vraisemblance) dans les directions des éléments du noyau de \mathbf{A} ; si l'opérateur est régulier mais mal conditionné, les hyperplans sont remplacés par un point minimum mais le critère autour de ce point prend une forme d'ellipsoïde très allongé dans les directions des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres les plus faibles, ce qui se traduit par une lente convergence des algorithmes. S'il y a une rupture entre le cas singulier et le cas mal conditionné au regard de l'unicité de la solution, il y a en revanche une continuité du point de vue algorithmique : l'instabilité des algorithmes due aux erreurs d'arrondi (*cf.* § 2.2) dans le premier cas est comparable à la lente convergence oscillante du second cas. Lorsque \mathbf{A} est bien conditionné, la propriété de *convexité* de ce critère quadratique rend les algorithmes déterministes particulièrement efficaces puisqu'ils sont les plus simples d'utilisation et ils convergent ici vers le minimum global du critère. Dans le cadre probabiliste, le hessien $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ s'interprète (à un facteur près) comme l'inverse de la matrice de covariance. Les petites valeurs propres du hessien caractérisent donc des directions dans lesquelles il y a une grande incertitude, ou dans lesquelles les données apportent peu d'informations.

Dans l'hypothèse où le modèle numérique n'est plus linéaire, et surtout lorsque le critère n'est plus convexe, il devient beaucoup plus délicat d'avoir une caractérisation simple du caractère numériquement mal posé du problème. On peut néanmoins essayer d'étendre à des conditions non plus nécessaires mais suffisantes les deux caractérisations numériques obtenues dans le cas linéaire :

- *Identifiabilité.* Dans le cas linéaire, l'existence d'une unique solution \mathbf{x} de taille N_x lors de la résolution du système $\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ est garantie par le fait que la solution correspond à l'intersection de N_x hyperplans linéairement indépendants, disponibles à partir de N_s observations (avec $N_s \geq N_x$). Si le modèle direct est non linéaire, à défaut

de disposer de relations explicites pour inverser, il demeure difficile de concevoir si ce raisonnement s'étend, par exemple, à une intersection d'hypervariétés – indépendantes selon un sens à déterminer. Néanmoins, une précaution susceptible de réduire le caractère mal posé consiste à vérifier que $N_s \geq N_x$ ou bien, si le modèle ne le permet pas (ce qui est le cas en TIÉ), de disposer de K jeux d'observations différents de sorte que $K \times N_s \geq N_x$. Cette condition est utilisée en particulier pour les inversions mettant en œuvre des méthodes de rétroprojection reposant sur des linéarisations successives. Remarquons toutefois que la vérification de cette condition d'identifiabilité n'est plus nécessaire dans le cadre des méthodes régularisées (cf. § 3.3) puisque l'apport d'information *a priori* est susceptible de compenser l'absence de données observées. Ainsi, il est admis et fréquent de résoudre de façon « fiable » des problèmes d'imagerie (*e.g.*, en synthèse de Fourier) en disposant d'un nombre d'observations bien inférieur au nombre d'inconnues. En TIÉ cependant, la non linéarité du problème et son aspect tomographique (les données ne sont observées que sur la frontière) contribuent à le rendre plus difficile. Aussi, dans les méthodes d'estimation que nous proposons aux chapitres IV et V, nous faisons l'hypothèse que la condition d'identifiabilité est vérifiée.

– *Stabilité.* Le critère pouvant faire apparaître des minima locaux, l'emploi d'algorithmes déterministes engendre une forme d'instabilité puisque la solution obtenue est alors un minimum local dépendant du point initial de l'algorithme. Néanmoins, ce type d'instabilité révèle plus une forme de complexité du problème qu'une stabilité intrinsèque puisqu'il peut être levé avec les algorithmes stochastiques ou les méthodes de relaxation. La stabilité intrinsèque se manifeste avant tout par l'existence de *zones localement instables* au sens où nous l'avons défini ci-dessus pour le cas quadratique, telles que des vallées localement très allongées à cause d'un *déficit local de courbure* dans certaines directions. Rappelons que les algorithmes déterministes reposent (entre autres) sur l'exploitation de caractéristiques d'ordre 1 et 2 de la nappe au point courant \mathbf{x}_n . Ils sont alors susceptibles de rester « coincés » dans ces zones, qui se caractérisent par un mauvais conditionnement du hessien en \mathbf{x}_n .

En règle générale, le processus de dégradation a pour conséquence quasi-systématique d'engendrer des instabilités numériques à cause de la réduction informationnelle qu'il opère. De plus, si le nombre d'inconnues N_x est supérieur au nombre de relations disponibles N_s , ce caractère instable de la nappe est renforcé. Toutes ces raisons rendent les algorithmes d'estimation inutilisables sans régularisation.

3.3 Régularisation du problème inverse

Parmi les méthodes visant à stabiliser le calcul des estimateurs, on trouve les méthodes de *décomposition tronquée en valeurs singulières* TSVD ([Andrews et Hunt 1977] et [Nashed 1981]) utilisées dans le cadre de l'estimation linéaire. La stabilisation est obtenue en supprimant de l'espace image les directions correspondant aux valeurs propres les plus petites, sources d'instabilité. Toutefois, ces méthodes ne sont pas facilement généra-

lisables au cadre de l'estimation non linéaire (on peut trouver cependant des tentatives dans ce sens dans [Eriksson 1996] à partir de linéarisations puis troncatures itératives). De plus, elles ne visent que la stabilisation de la méthode d'estimation et ne constituent pas un apport d'information *a priori* susceptible d'augmenter la résolution de l'estimation.

La satisfaction de ces deux *desiderata* (stabilité et apport possible d'une information *a priori*) est rendue possible dans le cadre des méthodes de critères (*cf.* [Phillips 1962], [Twomey 1962], [Tikhonov et Arsenin 1977], [Demoment 1989]) en ajoutant de manière pondérée au terme de fidélité aux données observées $J_{\text{obs}}(\mathbf{x})$ un terme de pénalisation dit de *régularisation* ou d'*a priori* J_{apr} de sorte que l'expression générale du critère devient :

$$J(\mathbf{x}) = J_{\text{obs}}(\mathbf{x}) + J_{\text{apr}}(\mathbf{x}) \quad (\text{I.18})$$

$$\text{avec } J_{\text{apr}}(\mathbf{x}) = \lambda \mathcal{U}(\mathbf{x}). \quad (\text{I.19})$$

Le réel $\lambda \geq 0$, appelé paramètre de régularisation, permet d'établir de manière continue un compromis entre la confiance que l'on porte, d'une part à la fidélité aux données via le modèle numérique du problème direct et d'autre part à l'information *a priori* via le terme de pénalisation choisi $\mathcal{U}(\mathbf{x})$. Au regard du problème de stabilité, il n'est pas nécessaire que le terme de régularisation corresponde à un modèle *a priori* bien posé. Il suffit que l'information qu'il apporte permette une stabilisation de l'algorithme d'estimation sur le critère J . Toutefois, si l'utilisateur a une grande confiance dans ses connaissances *a priori*, ce terme de régularisation peut (notamment par un λ élevé) autoriser d'aller bien au-delà d'une simple stabilisation de l'algorithme pour rendre plus précise la méthode d'estimation. Remarquons en outre que si $J_{\text{apr}}(\mathbf{x})$ est quadratique en même temps que $J_{\text{obs}}(\mathbf{x})$, $J(\mathbf{x})$ l'est de même si bien que le cadre de l'estimation linéaire est conservé lors de la régularisation.

Au regard des méthodes d'estimation probabilistes, la pénalisation de critère s'interprète dans le cadre bayésien (*cf.* [Hunt 1977], [Demoment 1989]) par l'introduction d'une loi *a priori* sur l'inconnue \mathbf{x} , loi que nous notons $p(\mathbf{x}; \theta_{\text{apr}})$ où θ_{apr} désigne l'ensemble des paramètres permettant de caractériser cette loi. On peut d'abord remarquer que, puisque le modèle direct $\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) + \mathbf{b}$ comporte deux grandeurs non observées \mathbf{b} et \mathbf{x} , il n'y a pas de raison de s'interdire d'introduire une loi *a priori* sur \mathbf{x} alors qu'on en introduit une sur \mathbf{b} . C'est l'utilisation de la règle de Bayes qui permet de combiner les deux de façon à faire disparaître \mathbf{b} des équations :

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta) = \frac{p(\mathbf{s}_{\text{obs}} | \mathbf{x}; \theta_{\text{obs}})p(\mathbf{x}; \theta_{\text{apr}})}{p(\mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta)}, \quad (\text{I.20})$$

où $\theta = (\theta_{\text{obs}}, \theta_{\text{apr}})$ et

$$p(\mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta) = \int_{\Lambda} p(\mathbf{s}_{\text{obs}} | \mathbf{x}; \theta_{\text{obs}})p(\mathbf{x}; \theta_{\text{apr}})d\mathbf{x},$$

indépendant de \mathbf{x} , joue simplement le rôle de coefficient de normalisation. La loi *a posteriori* $p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta)$ est une densité de probabilité de \mathbf{x} alors que la vraisemblance $l(\mathbf{x})$

ne s'interprète pas directement comme telle (puisque c'est une densité de probabilité de \mathbf{s}_{obs}). Le cadre ainsi défini est donc plus rigoureux pour la mise en œuvre des méthodes probabilistes. En outre, il est possible d'écrire la loi *a priori* sous la forme

$$p(\mathbf{x}; \theta_{\text{apr}}) \propto \exp\left\{-\frac{J_{\text{apr}}(\mathbf{x})}{2\sigma^2}\right\} \quad (\text{I.21})$$

de sorte que la méthode du *maximum a posteriori* (MAP), qui consiste à calculer

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta) \quad (\text{I.22})$$

revient à minimiser $J(\mathbf{x})$. Après régularisation, les méthodes de maximisation de lois sont donc toujours interprétables dans le cadre des méthodes de critère. Un autre type d'estimateur consiste à calculer la *moyenne a posteriori* (MP) défini par

$$\mathbf{x}_{\text{MP}} = \int_{\Lambda} \mathbf{x} p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta) d\mathbf{x}, \quad (\text{I.23})$$

i.e., l'espérance *a posteriori* de la loi $p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta)$. Dans le cas particulier où $p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta)$ est gaussienne, cet estimateur se confond avec le MAP mais, de manière générale, les deux estimateurs sont distincts. Comme pour le MAP, hormis dans le cas gaussien, il est rarement possible de calculer explicitement la MP. Cependant, les propriétés de convergence des algorithmes d'échantillonnage évoqués précédemment permettent d'utiliser ces méthodes pour calculer la MP par moyennage d'échantillons calculés sur un nombre suffisamment grand de tirages consécutifs (*cf.* [Tanner et Wong 1987], [Gelfand et Smith 1990], ainsi que [Besag et Green 1993]).

La construction des estimateurs MAP et MP peut s'interpréter comme le résultat de la minimisation de l'espérance d'une fonction de coût $C(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ prise par rapport à la loi *a posteriori*.

$$\boxed{\mathbf{x}_{\text{est}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \int_{\Lambda} C(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta) d\mathbf{x},} \quad (\text{I.24})$$

Cette fonction de coût $C(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ représente la manière de pénaliser le choix de $\hat{\mathbf{x}}$ comme estimateur lorsque l'on considère (sous l'intégrale) la possibilité pour \mathbf{x} d'être la solution. Le MAP est alors obtenu pour $C(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = 1 - \delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ tandis que la MP est obtenue avec $C(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2$.

Enfin, lorsque le coût est donné par $C(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{p=1}^{N_x} [1 - \delta(x_p, \hat{x}_p)]$, où x_p désigne la p -ième composante de \mathbf{x} , l'estimateur associé est alors le *maximum a posteriori* sur la marginale (MAPM) défini composante par composante par :

$$(\mathbf{x}_{\text{MAPM}})_p = \arg \max_{x_p} p(x_p | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta), \quad p = 1 \dots N_x$$

où $p(x_p | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta)$ est la densité marginale *a posteriori* de la p -ième composante de \mathbf{x} donnée par :

$$p(x_p | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta) = \int_{\Lambda} p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta) dx_1 \dots dx_{p-1} dx_{p+1} \dots dx_{N_x}.$$

Du point de vue de la robustesse [Marroquin et coll. 1987], le MAPM semble préférable puisqu'il revient à effectuer séparément N_x estimations marginales plutôt qu'une estimation globale. Toutefois, ces considérations qui concernent surtout les propriétés statistiques *asymptotiques* des estimateurs, peuvent être démenties à petit nombre d'observations.

En pratique, ce sont souvent les capacités de calculs qui imposent un choix d'estimateur, de sorte que la comparaison entre celles-ci n'est pas toujours possible. Le choix se porte alors sur l'estimateur le plus simple (souvent le MAP), dont la mise en œuvre n'est pas toujours aisée. Ceci conduit parfois les auteurs à adopter des stratégies *sous optimales* – pouvant s'avérer néanmoins robustes – qui reviennent à se contenter de minima locaux lors de la minimisation comme dans [Idier 1991] (déconvolution MBG multicanal en sismique) ou dans [Carfantan et coll. 1997] (dans le cadre du problème inverse de tomographie de diffraction avec un modèle direct non linéaire). Dans notre étude en TIÉ, nous utilisons comme estimateurs la MP et le MAP. Pour ce dernier, nous adoptons aussi une approche sous-optimale dans le sens où nous employons une méthode de descente déterministe pour minimiser un critère non convexe. Par souci d'unité de présentation, nous présentons ces deux méthodes (*cf.* chapitres IV et V) dans le cadre bayésien, bien que le MAP se ramène à la minimisation d'un critère dans $\Lambda \subset \mathbb{R}^{N_x}$.

Remarque I.3 (Prise en compte de plusieurs jeux d'observations).

Dans le cadre bayésien, il est possible de faire intervenir plusieurs jeux d'observations différents modélisés par :

$$\mathbf{s}_{\text{obs}}^k = \mathbf{a}(e_{\text{obs}}^k, \mathbf{x}) + \mathbf{b}^k$$

où $k = 1..K$ désigne l'indice d'un des K jeux de données. Cette possibilité est importante car elle nous permet de remplir la condition souhaitable énoncée ci-dessus pour l'identifiabilité qui consiste à utiliser pour l'inversion au moins autant de relations d'observations que d'inconnues. Nous l'utilisons systématiquement par la suite lors de la résolution de l'inversion en TIÉ. Si nous notons

$$\mathbf{s}_{\text{obs}}^t = [\mathbf{s}_{\text{obs}}^{1\ t}, \dots, \mathbf{s}_{\text{obs}}^{K\ t}]$$

la concaténation des sorties observées et si nous effectuons l'hypothèse (par défaut) d'indépendance des incertitudes \mathbf{b}^k , la vraisemblance des sorties observées s'écrit

$$p(\mathbf{s}_{\text{obs}} | \mathbf{x}; \theta_{\text{obs}}) = \prod_{k=1}^K p(\mathbf{s}_{\text{obs}}^k | \mathbf{x}; \theta_{\text{obs}}^k)$$

de sorte que la loi *a posteriori* devient :

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta_{\text{obs}}) = \prod_{k=1}^K p(\mathbf{s}_{\text{obs}}^k | \mathbf{x}; \theta_{\text{obs}}^k) \frac{p(\mathbf{x}; \theta_{\text{apr}})}{p(\mathbf{s}_{\text{obs}}; \theta)}. \quad (\text{I.25})$$

Si en outre la loi des \mathbf{b}^k est choisie gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$, le critère obtenu à partir de la densité *a posteriori* s'écrit :

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \frac{\|\mathbf{s}_{\text{obs}}^k - \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}^k, \mathbf{x})\|^2}{2\sigma_k^2} + J_{\text{apr}}(\mathbf{x}). \quad (\text{I.26})$$

3.4 Choix de la loi *a priori* pour l'estimation

De nombreuses considérations interviennent lors du choix d'une loi *a priori*. Nous relevons ici les principaux points utilisés lors des méthodes d'inversion susceptibles d'être utilisés en TIÉ.

3.4.1 Détermination d'une paramétrisation *pertinente*

La construction du modèle direct $\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{a}(\mathbf{e}_{\text{obs}}, \mathbf{x}) + \mathbf{b}$ fait souvent apparaître de manière « naturelle » l'inconnue sous une paramétrisation particulière notée ici \mathbf{x} . Ainsi en TIÉ, c'est la conductivité σ qui apparaît naturellement parce qu'elle est définie comme le coefficient de proportionnalité qui relie la densité de courant et le champ électrique et c'est avec cette paramétrisation que l'on construit le plus simplement le modèle direct (*cf.* chap. II).

Toutefois, cette paramétrisation n'est pas toujours la plus pertinente au regard de l'inversion. C'est particulièrement le cas dans notre étude où la distribution de conductivité recherchée est souvent très contrastée de sorte que la reparamétrisation $\gamma = \ln \sigma$ correspond plus à l'attente de l'utilisateur. Des reparamétrisations *bijectives* telles que $y = \ln x$ où $x > 0$ s'avèrent souvent particulièrement adaptées en vue de l'inversion puisque le comportement qualitatif des grandeurs positives perçues par l'utilisateur est dans de nombreux cas mieux reflété avec une échelle de progression logarithmique qu'avec une échelle linéaire. Ainsi en ce qui concerne l'audition, les échelles pertinentes de perception de l'amplitude sonore (dB) et des fréquences sont logarithmiques, de même que pour la luminosité pour la perception visuelle, voire « l'appât du gain » (*cf.* le chapitre 13 de [Jaynes draft]).

Nous prenons pour la reparamétrisation la notation suivante

$$\begin{aligned} g : \Lambda &\rightarrow \Delta \\ x &\mapsto y \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

et nous faisons de plus l'hypothèse que $\frac{dg}{dx}$ ne s'annule pas sur Λ et que l'application réciproque g^{-1} est de classe \mathcal{C}_1 de Δ sur Λ (donc g est bijective). Alors, il est important de remarquer que cette reparamétrisation peut être perçue et mise en œuvre de deux façons distinctes (au moins) pour l'estimation.

3.4.1.1 Changement de variable aléatoire La première façon de voir consiste à répercuter ce changement de variable sur la variable aléatoire elle-même en posant :

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}). \quad (\text{I.28})$$

Ainsi, d'après la formule de changement de variable pour une densité, on passe de la densité $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ à la densité $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ en écrivant

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{x}}(g^{-1}(\mathbf{y})) |\det[\mathbf{J}_{g^{-1}}(\mathbf{y})]|, \quad (\text{I.29})$$

où $\mathbf{J}_{g^{-1}}(\mathbf{y})$ désigne la matrice jacobienne de g^{-1} (de terme général $\frac{\partial g_i^{-1}}{\partial y_j}$). Notons que cette matrice jacobienne est diagonale puisque le changement de variable est défini à partir d'une fonction analytique. Ainsi, à partir de la densité loi *a posteriori* $f_{\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta) = p(\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta)$, la nouvelle densité $f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta)$ s'écrit :

$$\boxed{f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta) = f_{\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(g^{-1}(\mathbf{y})|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta) |\det[\mathbf{J}_{g^{-1}}(\mathbf{y})]|.} \quad (\text{I.30})$$

Cette forme de changement de variable est particulièrement adaptée à l'utilisation d'algorithmes stochastiques puisque, d'après l'équation (I.28), l'image par g d'un nuage de points échantillonnés selon la loi $f_{\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta)$ est un nuage de points échantillonnés selon la loi $f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta)$. Nous revenons sur cette propriété dans le chapitre V. En revanche, en raison de l'apparition du déterminant jacobien dans (I.29), l'estimée MAP en \mathbf{y} donnée par

$$\mathbf{y}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta)$$

est (en général) différente de $g(\mathbf{x}_{\text{MAP}})$. Afin de garder la propriété $\mathbf{y}_{\text{MAP}} = g(\mathbf{x}_{\text{MAP}})$, nous proposons une autre forme de changement de variable.

3.4.1.2 Changement de paramètre dans la densité Pour préserver le MAP par changement de variable, il suffit de ne pas faire apparaître le jacobien dans la nouvelle densité de probabilité. On construit ainsi une densité *a posteriori*

$$\boxed{f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta) := \frac{1}{Z} f_{\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(g^{-1}(\mathbf{y})|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta)} \quad (\text{I.31})$$

où Z est une constante de normalisation. Cela revient donc à effectuer un changement de paramètre dans la densité avec $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ ainsi qu'un changement de variable $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ mais tel que $\mathbf{y} \neq g(\mathbf{x})$. Or g est bijective de Λ sur Δ . Donc, si \mathbf{x} est l'argument du maximum global (unique) de $f_{\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(\mathbf{x}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta)$, $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ est l'argument du seul maximum global de $f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}_{\text{obs}};\theta)$ et réciproquement. Par conséquent, on a bien :

$$\boxed{\mathbf{y}_{\text{MAP}} = g(\mathbf{x}_{\text{MAP}}).} \quad (\text{I.32})$$

Ce changement de paramètre sert donc surtout lorsqu'on cherche à évaluer le MAP. Il va permettre en particulier d'introduire des lois *a priori* directement sur la grandeur pertinente \mathbf{y} . Il est vrai cependant que cette opération peut s'effectuer directement sur $g(\mathbf{x})$ et qu'une reparamétrisation n'est pas nécessaire pour l'effectuer. L'intérêt de cette reparamétrisation réside surtout dans ses conséquences algorithmiques. Ainsi, dans l'exemple mentionné précédemment ($\mathbf{y} = \ln \mathbf{x}$ où $\mathbf{x} > \mathbf{0}$), le nouveau vecteur \mathbf{y} n'a pas à être contraint dans $\mathbb{R}_+^{*N_x}$ comme c'est le cas pour \mathbf{x} . Ceci peut donc faciliter de manière significative la mise en œuvre algorithmique de la méthode.

On peut remarquer que ce changement de variable peut occasionner une perte de la convexité du critère. On a cependant la propriété suivante :

Propriété I.1 (Conservation de l'unimodalité).

Si $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ est une densité de probabilité *unimodale*, alors la densité de probabilité $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ obtenue par la reparamétrisation (I.31) l'est aussi.

Pour le voir, supposons que $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ soit unimodale. Alors, si \mathbf{y} est un mode de $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$, on a

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{y}} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} = \frac{1}{Z} \mathbf{J}_{g^{-1}(\mathbf{y})} \mathbf{grad}_{g^{-1}(\mathbf{y})} f_{\mathbf{x}}(g^{-1}(\mathbf{y})).$$

Or, par hypothèse, $\frac{dg^{-1}}{dy} \neq 0$ sur Δ donc aucune des composantes de $\mathbf{J}_{g^{-1}(\mathbf{y})}$ (diagonale) ne s'annule. Il est donc nécessaire que

$$\mathbf{grad}_{g^{-1}(\mathbf{y})} f_{\mathbf{x}}(g^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Aussi, puisque $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ est unimodale, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{MAP}}$, donc $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}_{\text{MAP}}) = \mathbf{y}_{\text{MAP}}$ ce qui signifie que $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ est de même unimodale. Cette propriété permet de continuer à utiliser des algorithmes déterministes pour optimiser la nouvelle densité.

En revanche, si le modèle direct est linéaire en \mathbf{x} et si \mathbf{x} est le paramètre « naturel » de construction de ce modèle ($\mathbf{s}_{\text{obs}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$), une éventuelle reparamétrisation occasionnera une perte de la propriété de linéarité. Si l'utilisateur ne désire pas utiliser cette propriété lors de l'inversion, ce qui peut être le cas lors de méthodes d'estimations non linéaires, la perte de la linéarité n'est pas gênante. Toutefois, la propriété de linéarité permet parfois des mises en œuvre *rapides* des méthodes d'inversion (cf. [Demoment 1987]) sans lesquelles des estimateurs sont inutilisables en pratique. Ces situations arrivent bien sûr lors des traitements en temps réel mais aussi lors des méthodes d'estimations en temps différé pour lesquels un gain de temps d'un facteur 10 ou plus n'est jamais négligeable.

C'est donc dans le cadre du *changement de paramètre dans la densité* que nous utilisons, pour la TIÉ, le changement de variable $\gamma = \ln \sigma$ (cf. chapitre IV). Pour l'estimation MAP de la conductivité, l'introduction d'une loi *a priori* en γ s'avère particulièrement avantageuse, d'autant plus que le comportement du problème direct semble qualitativement « plus proche de la linéarité » avec γ qu'avec σ .

3.4.2 Utilisation de loi *a priori* markoviennes

Par souci de simplicité, les premières lois *a priori* auxquelles on pense sont les *modèles à loi séparable* dans lesquelles toutes les composantes de l'objet à reconstruire \mathbf{x} sont indépendantes et identiquement distribuées de sorte que la densité *a priori* s'écrit :

$$p(\mathbf{x}; \theta_{\text{apr}}) = \prod_{p=1}^{N_x} p(x_p; \theta_{\text{apr}}).$$

Parmi les lois séparables généralement employées, on trouve les lois gaussiennes de *rappel à une valeur moyenne* définies par :

$$p(x; (m, \sigma)) \propto \exp - \frac{(x - m)^2}{2\sigma^2},$$

qui pénalisent les écarts de x par rapport à une valeur moyenne m . On trouve par ailleurs, lorsque l'objet est positif, les lois

$$p(x; (\alpha, \beta)) \propto \exp\{-\alpha x \ln x + \beta x\},$$

utilisées lorsque l'histogramme de l'image est proche de zéro – ce qui est le cas pour les images astronomiques. Il existe pour justifier le choix de ces lois des raisonnements du type « maximum d'entropie » (*cf.* [Mohammad-Djafari et Demoment 1988]) provenant de la théorie de l'information.

Le principal inconvénient des modèles à loi séparable est qu'ils ne permettent pas de prendre en compte des dépendances entre les x_p . Très souvent en effet, les éléments du vecteur \mathbf{x} représentent les pixels d'un signal (mono- ou multi-dimensionnel) sur lequel l'utilisateur s'attend *a priori* à observer des dépendances spatiales locales entre pixels (*e.g.*, une continuité locale qui se manifeste par un faible écart entre les valeurs des pixels situés sur des sites adjacents). En TIÉ (notamment en imagerie biomédicale), les distributions de conductivité à estimer correspondent souvent à des zones homogènes séparées par des discontinuités. Il est donc souhaitable de pouvoir introduire une loi *a priori* favorisant localement une certaine douceur en même temps qu'une capacité à accepter des discontinuités.

Une manière désormais très répandue d'introduire ces dépendances locales de manière probabiliste consiste à utiliser un champ de Markov pour la loi *a priori*. Nous en fournissons ici une brève présentation destinée à rappeler les définitions et à fixer les notations. Le lecteur désireux d'approfondir ces notions peut se reporter aux références que nous mentionnons, en particulier [Geman 1990] et [Winkler 1995] qui constituent des ouvrages de synthèse. Nous nous attachons ici à particulariser les propriétés des champs de Markov pour un support 2D où le domaine est discrétisé avec des éléments (ou mailles) triangulaires puisque ce type de pavage résulte de la modélisation MÉF que nous adoptons pour résoudre le problème direct de TIÉ (*cf.* chapitre III).

Définition I.3 (Sites, voisinages, graphe, cliques [Winkler 1995]).

Nous appelons *sites* les pixels de l'image – pour la MÉF, ce sont les éléments. Nous appelons $\Sigma := \{s_1, \dots, s_{N_x}\}$ l'ensemble des N_x sites considérés sur l'image. Alors, nous avons les trois définitions suivantes :

– $\Gamma := \{\Gamma_s, s \in \Sigma\}$ est un *système de voisinage* pour Σ si c'est un ensemble de sous-ensembles de Σ et si :

1. $s \notin \Gamma_s$;
2. $s \in \Gamma_r \Leftrightarrow r \in \Gamma_s$.

Un élément Γ_s de Γ regroupe les sites *voisins* du site s ;

– l'ensemble $\{\Sigma, \Gamma\}$ est appelé *graphe* ;

– χ , sous-ensemble de Σ , est une *clique* si c'est un singleton ou si tous les éléments de χ sont voisins deux à deux. L'*ordre* d'une clique est le nombre de ses sites. On note \mathcal{C} l'ensemble des cliques du graphe $\{\Sigma, \Gamma\}$.

Dans la littérature, une grande majorité des champs de Markov 2D sont construits sur des sites définis à partir de pavages réguliers, souvent cartésiens. Dans [Mead 1967], l'auteur utilise un maillage régulier hexagonal pour modéliser des accroissements de végétaux dans une plantation. Dans [Besag 1974], l'auteur suggère néanmoins l'utilisation de pavages irréguliers appelés *non-lattice systems*. Ainsi dans [Besag et coll. 1991], pour modéliser les risques de cancer de la thyroïde, l'auteur définit un système de voisinage sur le territoire de France métropolitaine en s'appuyant sur une relation de contiguïté entre départements possédant une frontière commune. Dans la présente étude, puisque nous discrétisons le domaine spatial en triangles par la méthode des éléments finis (*cf.* chapitre III), nous adoptons une structure de voisinage adaptée à ce type de pavage.

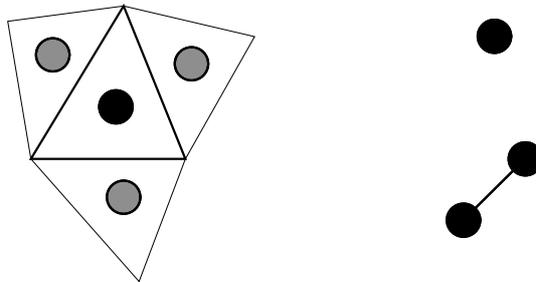


FIG. I.3 - À gauche, système de voisinage d'ordre 1 pour un maillage triangulaire. À droite, catégories de cliques associées : ici seuls les singletons et les paires de mailles adjacentes forment une clique.

Lorsque le pavage est régulier, une manière simple de définir le système de voisinage consiste à s'appuyer sur une métrique fournie par la topologie du milieu. Ainsi, quand le maillage est cartésien, si d désigne la distance entre deux sites adjacents placés sur la même ligne, le voisinage d'ordre 1 du site i est donné par l'ensemble des sites $j \neq i$ tels que $\text{dist}(i, j) \leq d$, où dist désigne la distance \mathcal{L}_2 classique. Pour le voisinage d'ordre 2, il faut prendre $\text{dist}(i, j) \leq \sqrt{2}d, \dots$ (*cf.* par exemple [Besag 1974]).

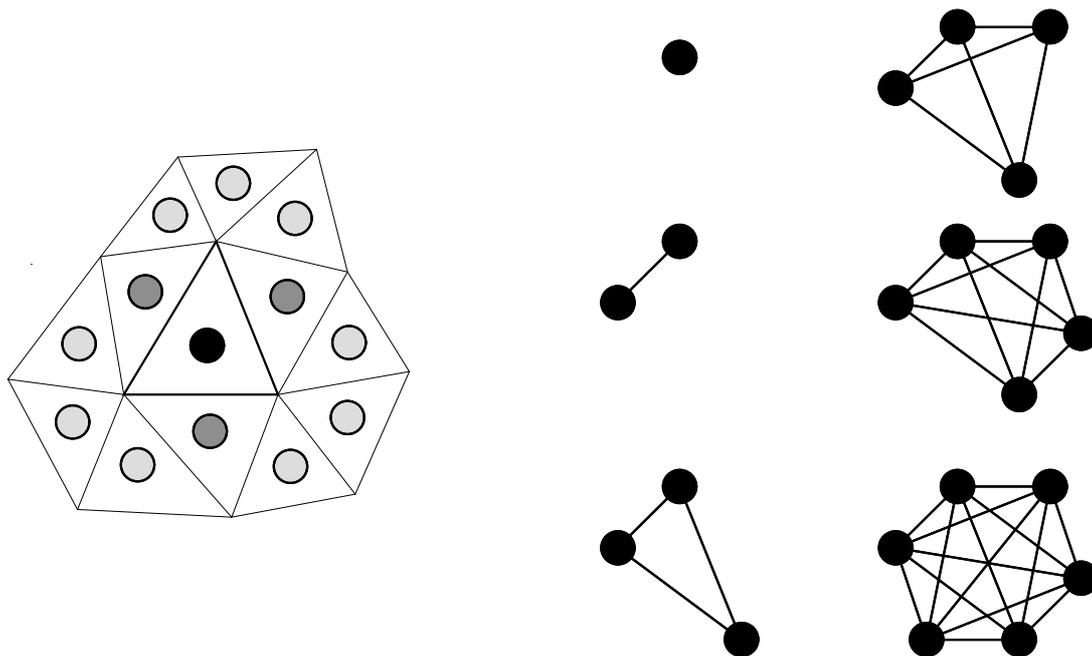


FIG. I.4 - À gauche, système de voisinage d'ordre 2 pour un maillage triangulaire. À droite, catégories de cliques associées : l'ordre des cliques peut atteindre le nombre d'éléments communs à un sommet, qui correspond à 6 en moyenne si les triangles sont proches de l'équilatéralité comme l'illustre la figure de gauche.

Puisque nous adoptons ici une structure irrégulière, l'utilisation d'une métrique n'est plus envisageable pour définir une structure de voisinage. Néanmoins, le maillage en éléments comporte une certaine régularité puisque l'espace est discrétisé en triangles somme toute « plus ou moins proches » dans le plan. Ainsi, un *voisinage d'ordre 1* se définit naturellement à partir des éléments j possédant une arête commune avec un élément $i \neq j$ (cf. Fig. I.3). De même, on pourra envisager un *voisinage d'ordre 2* à partir des éléments j possédant non seulement une arête commune avec un élément $i \neq j$ mais aussi un sommet commun (cf. Fig. I.4).

C'est bien sûr cette notion de voisinage qui permet d'introduire les dépendances locales qui nous intéressent. Ceci correspond exactement à la définition d'un champ de Markov (cf. [Besag 1974]).

Définition I.4 (Champ de Markov [Besag 1974]).

Soit $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_{s_1}, \dots, \mathcal{X}_{s_{N_x}}\}$ un processus aléatoire indexé par Σ et à valeur dans Λ . \mathcal{X} est un *champ de Markov* relativement au graphe $\{\Sigma, \Gamma\}$ si et seulement si :

- $p(\mathbf{x}) = f_{\mathcal{X}}(\mathcal{X} = \mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Lambda$;
- $f_{\mathcal{X}_s | \mathcal{X}_r}(\mathcal{X}_s = x_s | \mathcal{X}_r = x_r, r \neq s) = f_{\mathcal{X}_s | \mathcal{X}_r}(\mathcal{X}_s = x_s | \mathcal{X}_r = x_r, r \in \Gamma_s), \forall s \in \Sigma$, condition que l'on peut abrégier $p(x_p | x_q, p \neq q) = p(x_p | x_q, q \in \Gamma_{s_p})$.

La seconde condition, décrite sous forme de probabilité conditionnelle locale (encore appelée *caractéristique locale*), définit une forme de dépendance spatiale des pixels de \mathbf{x}

vis-à-vis de leurs voisins. Toutefois, cette définition ne permet pas en pratique de construire aisément des champs de Markov. En effet, on ne sait pas construire facilement une loi jointe $p(\mathbf{x})$ à partir de la donnée de caractéristiques locales. De plus, l'existence et l'unicité de cette dernière ne sont pas garantis. Cette difficulté est résolue par l'introduction des champs de Gibbs ([Winkler 1995]).

Définition I.5 (Champ de Gibbs [Winkler 1995]).

Si $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_{s_1}, \dots, \mathcal{X}_{s_{N_x}}\}$ est un processus aléatoire indexé par Σ et à valeur dans Λ , \mathcal{X} est un *champ de Gibbs* relativement au graphe $\{\Sigma, \Gamma\}$ si $p(\mathbf{x}) = f_{\mathcal{X}}(\mathcal{X} = \mathbf{x})$ se met sous la forme :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp -\lambda \mathcal{U}(\mathbf{x}), \quad \lambda \geq 0$$

où

- $\mathcal{U}(\mathbf{x}) = \sum_{\chi \in \mathcal{C}} \mathcal{V}_{\chi}(\mathbf{x})$ est appelée fonction d'énergie ;
- pour toute clique χ , la fonction $\mathcal{V}_{\chi}(\mathbf{x})$, appelée fonction de potentiel, ne dépend que des composantes x_p de \mathbf{x} pour les sites s_p appartenant à χ ;
- Z est une constante appelée fonction de partition ;
- $\lambda = \frac{1}{T}$, où T , par analogie avec la thermodynamique, est communément appelé *température*.

Le lien entre les champs de Gibbs et les champs de Markov est donné par le théorème de Hammersley-Clifford (*cf.* [Hammersley et Clifford 1968], [Besag 1974], [Geman 1990]), que nous énonçons maintenant.

Théorème I.1 (théorème d'équivalence d'Hammersley Clifford).

\mathcal{X} est un champ de Markov relativement au graphe $\{\Sigma, \Gamma\}$ si et seulement si c'est un champ de Gibbs.

Une conséquence de ce théorème réside dans le lien pratique très fort qui existe entre les méthodes de minimisation de critères et les méthodes probabilistes puisque le choix d'une loi *a priori* markovienne se ramène à choisir une fonction d'énergie $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ qui est dans sa définition proportionnelle au terme de pénalisation J_{apr} tel que nous l'avons défini dans l'équation (I.19).

Remarque I.4 (Rôle des cliques et de l'ordre du voisinage).

Les *cliques* interviennent essentiellement dans la construction des fonctions de potentiel. Par exemple, celles-ci sont souvent des fonctions de pénalisation des différences (premières) entre éléments adjacents. Dès lors, si $N_{\mathcal{C}}^2$ désigne le nombre total de cliques d'ordre 2 du graphe, les fonctions d'énergie s'écrivent

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{D}\mathbf{x}), \quad \lambda > 0$$

où \mathbf{D} , opérateur de différence de taille $N_c^2 \times N_x$, est défini ligne par ligne (chaque ligne étant indexée par son numéro de clique i) par l'opérateur de différence sur les deux sites de la clique i . \mathbf{D} est donc en particulier une matrice creuse. En revanche, c'est l'ordre du voisinage qui définit le *support* de la caractéristique locale, (et par conséquent le nombre de cliques). Le rôle de ce support est important car il intervient dans le support de la caractéristique locale *a posteriori* et, plus ce dernier est important, plus le coût de mise en œuvre d'une mise à jour d'un pixel dans un algorithme d'échantillonnage est élevé (cf. [Idier 1991] et [Nikolova 1995]).

Par souci de simplicité, nous choisissons pour les méthodes d'inversion en TIÉ de faire intervenir les dépendances locales entre éléments exclusivement par des différences premières sur des voisinages d'ordre 1. Pour construire une loi *a priori*, il reste donc à choisir la fonction Φ .

3.4.3 Choix d'une fonction de potentiel

3.4.3.1 Homogénéité Puisque nous avons choisi de n'utiliser pour la régularisation que des différences premières, la fonction d'énergie $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ peut se réécrire :

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{D}\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_c^2} \phi_i(t_i)$$

où i désigne l'indice de la clique courante et $t_i = x_p - x_q$ est la différence première entre les deux pixels (p, q) associés à la i -ème clique. Le maillage triangulaire que nous utilisons étant irrégulier, il semble naturel de choisir pour chaque fonction de potentiel

$$\phi_i(t_i) = \frac{c_i}{\bar{c}} \phi(t_i) \quad (I.33)$$

où c_i désigne la longueur de l'arête commune aux deux éléments adjacents de la clique i et

$$\bar{c} = \frac{1}{N_c^2} \sum_{i=1}^{N_c^2} c_i$$

est la moyenne arithmétique de ces cotés. On pénalise ainsi chaque différence proportionnellement à la longueur de l'arête commune. Dans la suite, comme nous utilisons des maillages proches de l'équilatéralité, nous choisissons un champ de Gibbs *homogène* en posant :

$$\forall i \in [1..N_c^2], \phi_i(t_i) = \phi(t_i).$$

3.4.3.2 Convexité Les algorithmes les plus fréquemment utilisés étant des algorithmes de descente, la *convexité* est une qualité très recherchée des fonctions de potentiel.

Parmi les plus fréquemment utilisées (cf. Fig. I.5), on trouve les fonctions de potentiel suivantes :

– $\phi(t) = t^2$. Le potentiel quadratique correspond à une régularisation \mathcal{L}_2 , *i.e.*, un *a priori* gaussien. Cette fonction, (appliquée aux différences d'ordre 1) favorise la continuité locale de l'objet en pénalisant fortement les discontinuités ;

– $\phi(t) = |t|$. Ce potentiel correspond à une régularisation \mathcal{L}_1 , *i.e.*, un *a priori* laplacien. Tout en favorisant une certaine continuité locale, sa croissance moins rapide à l'infini que le \mathcal{L}_2 permet à ce potentiel de préserver les fortes discontinuités. Toutefois, ce potentiel n'est pas strictement convexe et son utilisation avec nombre de méthodes de descente est fortement contrariée par sa non dérivabilité en $t = 0$;

– $\phi_p(t) = |t|^p$, $1 < p \leq 2$. Cette fonction de potentiel correspondant à une régularisation \mathcal{L}_p a été introduite dans [Bouman et Sauer 1993] sous l'appellation de modèle de Gauss-Markov généralisé. Elle est utile en particulier pour les p proches de 1 pour favoriser des discontinuités dans les reconstructions tout en étant dérivable en $t = 0$;

– $\phi_\tau(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\tau^2} & \text{si } |t| < \tau, \\ 2\frac{|t|}{\tau} - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$ Ce potentiel $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_2$ est connu sous le nom de fonction de Huber (*cf.* [Huber 1981], [Künsch 1994]). Pour τ proche de 0, il possède un comportement \mathcal{L}_1 tout en restant dérivable à l'origine. Il offre en plus l'avantage de n'utiliser que des fonctions de puissances entières (1 et 2) ce qui est moins cher en coût de calcul algorithmique que des fonctions \mathcal{L}_p . Nous utilisons ce potentiel pour l'estimation en TIÉ par le MAP ;

– $\phi_\tau(t) = \ln \operatorname{ch} \frac{|t|}{\tau}$, utilisée dans [Green 1990] ;

– $\phi_\tau(t) = \frac{|t|}{\tau} - \ln(1 + \frac{|t|}{\tau})$, utilisée dans [Li et Huang 1995].

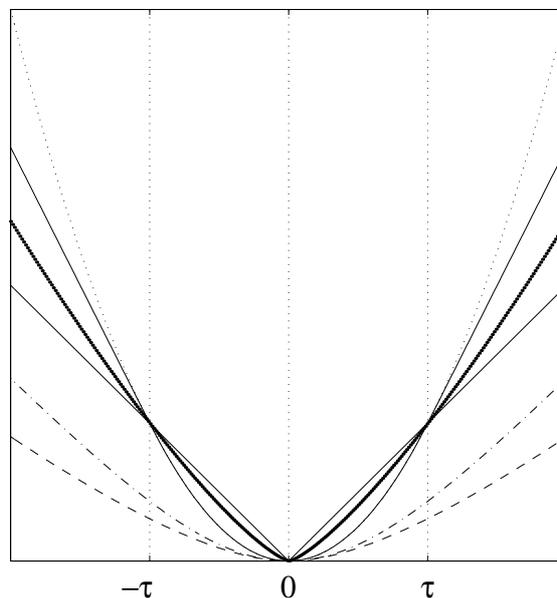


FIG. I.5 - Fonctions de potentiel convexes : \mathcal{L}_2 (:), \mathcal{L}_1 et Huber (—), \mathcal{L}_p (·), $\ln \operatorname{ch} \frac{|t|}{\tau}$ (—·) et $\frac{|t|}{\tau} - \ln(1 + \frac{|t|}{\tau})$ (—).

Toutefois, l'efficacité des fonctions de potentiel convexe pour reconstruire des discontinuités demeure limitée car elles pénalisent très fortement les grands écarts entre pixels

voisins. Parmi les fonctions non convexes envisageables, on trouve les fonctions unimodales suivantes :

- $\phi_\tau(t) = \min(\frac{t^2}{\tau^2}, 1)$. Cette fonction appelée *quadratique tronquée* a été introduite par [Blake et Zisserman 1987] pour la segmentation d'images. Appliquée sur les différences entre pixels adjacents, elle favorise une douceur entre pixels voisins grâce à sa zone quadratique. Elle permet néanmoins de reconstruire les discontinuités en ne pénalisant pas davantage les écarts dépassant le seuil τ . L'utilisation de cette fonction pour estimer le MAP de manière optimale a été rendue possible grâce à l'utilisation de la non-convexité graduelle (GNC) [Blake et Zisserman 1987]. Cette fonction a également été utilisée avec succès en problèmes inverses (dont le modèle direct est linéaire) par [Nikolova 1995] et [Martin 1993], grâce à un affinement dans la mise en œuvre du GNC ;

- $\phi_\tau(t) = -\frac{1}{1+\frac{t^2}{\tau^2}}$ introduite par [Geman et McClure 1987] ;

- $\phi_\tau(t) = \ln(1 + \frac{t^2}{\tau^2})$ introduite dans [Hebert et Leahy 1989] ;

- $\phi_\tau(t) = -\frac{1}{1+\frac{|t|}{\tau}}$ introduite dans [Geman et Reynolds 1992].

Une autre manière d'introduire des fonctions de potentiel non convexe consiste à introduire dans celles-ci des variables auxiliaires de sorte que

$$\phi(t) = \min_l \psi(t, l).$$

Dans certains cas, la variable auxiliaire l s'interprète comme une *variable de ligne*. Ainsi, la quadratique tronquée peut se réécrire :

$$\phi_\tau(t) = \min_l \left[\frac{t^2}{\tau^2}(1-l) + \frac{l}{\tau^2} \right], \quad l \in \{0, 1\}$$

où l s'interprète ici comme une variable de ligne binaire: si $l = 1$, il existe une discontinuité entre les deux sites concernés par la différence t , si $l = 0$, il n'y en a pas. De même, le cadre théorique de la dualité, construit à partir des propriétés de la *transformée de Legendre Fenchel*, permet de construire des fonctions $\psi(t, l)$ où l est alors une variable de ligne à valeur continue (cf. [Luenberger 1969], [Geman et Reynolds 1992] et [Geman et Yang 1995]). L'utilisation de la dualité peut s'interpréter explicitement sous la forme d'une fonction d'énergie $\mathcal{U}(\mathbf{x}, \mathbf{l})$ de sorte que le nouveau critère global s'écrit :

$$J'(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = J_{\text{obs}}(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{U}(\mathbf{x}, \mathbf{l}).$$

Que ce soit pour les méthodes déterministes ou pour les méthodes stochastiques, l'intérêt algorithmique de la dualité réside donc – en dépit de l'augmentation du nombre de variables – dans la séparabilité des variables de lignes (au sens où aucune clique ne contient plus d'une variable de ligne) ainsi que dans une éventuelle simplification de $J'(\mathbf{x}, \cdot)$ par rapport à $J(\mathbf{x})$.

3.5 Choix des hyperparamètres

L'utilisation d'une loi de probabilité *a priori* pour le bruit \mathbf{b} et pour l'objet \mathbf{x} fait intervenir des paramètres permettant de contrôler la forme de ces lois, θ_{obs} et θ_{apr} , encore appelés *hyperparamètres*. La détermination d'estimées ponctuelles avec les méthodes que nous venons de mentionner suppose que nous fixions les hyperparamètres pour les intégrer aux algorithmes. Or, nous venons de voir que le choix de ces lois est aussi bien régi par des considérations avant tout qualitatives reflétant une information *a priori* que par des considérations pratiques reflétant la capacité de mise en œuvre algorithmique de l'estimateur. La recherche de la « vraie valeur » des hyperparamètres n'a donc pas plus de sens, au regard du compromis que nous venons de mentionner, que la recherche du « vrai » \mathbf{x} . Toutefois, l'emploi de certaines valeurs d'hyperparamètres conduit à des estimations « inacceptables » alors qu'avec d'autres valeurs, la même méthode donnera des estimations « remarquables » *i.e.*, conformes à l'attente de l'utilisateur. On est donc facilement conduit à rechercher, à l'intérieur même de la méthode d'estimation, une valeur *optimale* de $\theta = (\theta_{\text{obs}}, \theta_{\text{apr}})$, dans un sens qui reste à définir.

On trouve dans la littérature diverses méthodes visant à formaliser et à automatiser un choix *optimal* des hyperparamètres. On peut mentionner en particulier les méthodes de *maximum de vraisemblance* (MV) et de *maximum de vraisemblance généralisé* (MVG) qui possèdent des fondements probabilistes. Toutefois, ces méthodes sont rarement utilisées en pratique car elles font appel, comme « brique élémentaire » de l'algorithme, aux méthodes d'estimation à hyperparamètres fixés. Or, si les méthodes d'estimation d'hyperparamètres peuvent être relativement rapides et peu coûteuses pour des problèmes de débruitage, ce n'est déjà plus le cas pour les problèmes de restauration où le *voisinage a posteriori* d'un pixel s'étend sur quelques pixels. C'est *a fortiori* encore moins le cas pour un problème non linéaire de reconstruction tel que la TIÉ où le *voisinage a posteriori* d'un élément s'étend à tout le domaine. La question de l'estimation des hyperparamètres en TIÉ se situe donc au delà du présent travail. L'utilisation de méthodes d'inversion stochastiques pour la TIÉ, tel que nous l'envisageons au chapitre V, constitue toutefois un point de départ intéressant pour aborder cette question.

Nous proposons donc ici des méthodes d'estimation TIÉ *supervisées*, *i.e.*, mettant en œuvre les algorithmes avec des hyperparamètres déterminés. Deux remarques peuvent nous aider à fixer ces paramètres pertinemment :

- La première remarque que l'on peut faire au sujet des hyperparamètres est qu'ils correspondent souvent, dans l'esprit de l'utilisateur, à des échelles de valeur relativement précises. Ainsi, l'ordre de grandeur de la puissance de l'incertitude \mathbf{b} est-elle souvent connue, de même que l'ordre de grandeur des discontinuités susceptibles d'apparaître dans l'objet \mathbf{x} . De même, il est difficile d'imaginer, pour le paramètre λ – contrôlant la pondération entre la fidélité aux observations et l'*a priori* – des variations pouvant dépasser quelques ordres de grandeur ;
- Le second point consiste à voir qu'en pratique, si le problème est bien régularisé et

que l'utilisateur « n'en exige pas trop » des observations, la qualité des estimations n'est sensible aux variations des hyperparamètres que lorsque ces variations sont grandes, *i.e.*, de l'ordre d'un facteur d'échelle.

C'est pourquoi, dans un grand nombre de cas, l'estimation des hyperparamètres est effectuée « au jugé ». L'utilisateur commence par utiliser sa procédure d'estimation supervisée avec des hyperparamètres qu'il juge *a priori* plausibles. Puis, au vu des résultats obtenus, il affine son estimation en modifiant les hyperparamètres dans le sens qu'il perçoit comme étant susceptible d'améliorer l'estimation. En règle générale, un très petit nombre d'appels de la procédure (moins d'une dizaine s'il y a moins de 3 hyperparamètres) est nécessaire pour déterminer un θ « convenable ». C'est cette méthode que nous utilisons pour l'inversion en TIÉ.

CHAPITRE II

MODÈLE ANALYTIQUE DU PROBLÈME DE TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE

1 Introduction

NOUS PRÉSENTONS ICI la modélisation par les lois de la physique de l'expérience de *tomographie d'impédance électrique* (TIÉ), puis les formulations analytiques résultantes du problème de TIÉ. Plus précisément, nous nous intéressons ici au *modèle analytique* au sens où nous l'avons défini au chapitre I, permettant d'envisager le comportement à la fois du problème direct et du problème inverse de TIÉ (définis ci-après). Rappelons que nous étudions la TIÉ d'objets conducteurs fermés isotropes *a priori* inhomogènes et bidimensionnels, soumis à des courants continus. Par conséquent, nous nous consacrons seulement à l'analyse de conductivités réelles.

Hormis l'originalité de la présentation, ce chapitre ne présente pas de nouveauté scientifique. Il a pour but, dans un premier temps, de montrer simplement les propriétés analytiques et les liens qualitatifs qui existent entre les distributions de courant et de potentiel d'une part, et la distribution de conductivité du milieu d'autre part, pour le problème direct comme pour le problème inverse. Nous présentons pour cela deux formulations analytiques différentes du problème : d'abord la *formulation différentielle* puis la *formulation variationnelle*. Dans le cas général, ces équations n'admettent pas de solutions se présentant sous la forme de fonctions analytiques connues. Aussi, ce chapitre constitue également une introduction, par le biais de la formulation variationnelle, à la résolution numérique du problème direct par la méthode des éléments finis, que nous présentons dans le chapitre III.

2 Conventions

Nous notons Ω (*Fig. II.1*) le domaine 2D en question et $\bar{\Omega}$ son contour¹. Un point M de Ω est repéré par ses coordonnées (x, y) . Dans la suite, toutes les grandeurs définies

1. Habituellement, la notation $\bar{\Omega}$ désigne la fermeture de Ω et non sa frontière. Ici, toutefois, comme Ω est fermé, sa fermeture est égale à Ω . Il n'y a donc pas d'ambiguïté.

sur Ω (en particulier leurs restrictions sur $\bar{\Omega}$) sont implicitement des distributions. Nous précisons leur espace de définition seulement si cela s'avère nécessaire à la compréhension de la physique du problème.

Le milieu considéré, de conductivité σ , est non dégénéré : il n'y a ni zones supraconductrices ($\sigma = \infty$) ni « trous » ($\sigma = 0$). Il n'est pas nécessaire de supposer σ continu.

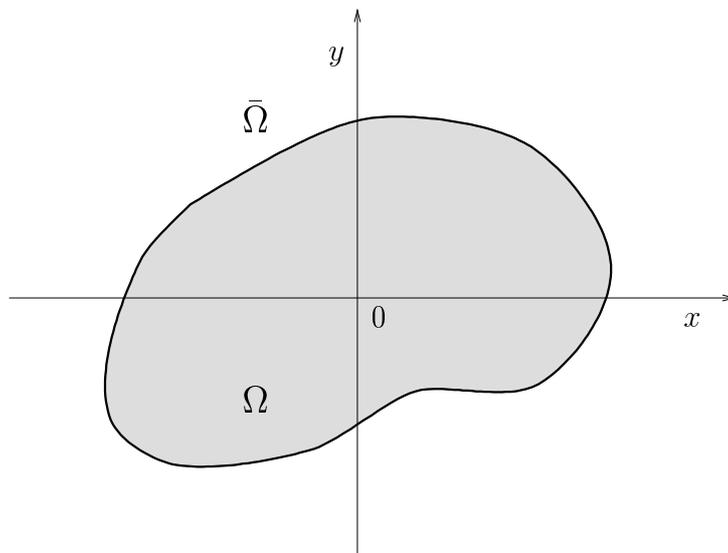


FIG. II.1 - Le domaine Ω est un fermé connexe, non nécessairement convexe.

Nous notons \vec{j} la densité de courant, \vec{E} le champ électrique, I et V les distributions respectives du flux de courant et du potentiel électrique sur Ω et \bar{I} , \bar{V} leurs restrictions sur $\bar{\Omega}$. Il est alors utile de distinguer deux types de problèmes directs différents. Nous appelons *problème direct restreint* la détermination de \bar{V} à partir de σ et \bar{I} . C'est cette détermination qui est, à proprement parler, utilisable en pratique puisque l'expérience ne nous fournit que la restriction de V sur $\bar{\Omega}$ (les mesures). D'autre part, nous appelons *problème direct* voire *problème direct étendu* le calcul de V connaissant \bar{I} et σ . Quant au *problème inverse*, que nous cherchons à résoudre, il consiste à déterminer σ à partir de \bar{I} et \bar{V} .

3 Équations de la physique du problème

La physique de l'expérience, modélisée à partir des équations de Maxwell, est assez simple. Étant donné les hypothèses que nous avons choisies (courant statique et continu), seules deux de ces équations interviennent. La première résulte du principe de conservation de la matière. En tout élément de surface de notre objet, le courant rentrant est égal au courant sortant. Autrement dit, la divergence de celui-ci, en chaque point M de l'objet

est nulle, ce qui s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (\text{II.1})$$

avec $\vec{j}(M)$ défini ci-avant. La seconde de ces équations résulte du principe de conservation de l'énergie d'une part, et d'autre part du fait qu'une charge exerce une force radiale sur les autres charges. L'énergie fournie à une particule chargée pour partir et revenir au même endroit, sous l'influence d'un élément de charge, est nulle. Autrement dit, le travail total de la force électrique exercée par cet élément, ou encore la circulation de son champ électrique \vec{E} sur une courbe fermée est nulle, ce qui revient à :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0}. \quad (\text{II.2})$$

Enfin, en régime stationnaire, la loi d'Ohm stipule qu'il s'établit un équilibre entre le champ électrique et le courant électrique. Cela se traduit par la colinéarité de \vec{E} et de \vec{j} . Le coefficient de proportionnalité étant la conductivité $\sigma(M)$, on a :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (\text{II.3})$$

Remarque II.1 (Unités).

En raison de la modélisation 2D du problème il peut apparaître une ambiguïté sur les unités de mesure utilisées. Deux points de vue sont envisageables pour l'interprétation.

– Soit l'expérience 2D considérée est une *coupe* particulière d'une expérience 3D (uniforme sur la cote). Alors les courants imposés « vus » par le milieu 2D sont des courants linéiques ($A.m^{-1}$) et les unités des grandeurs sont les suivantes :

$$V \sim V, \vec{E} \sim V.m^{-1}, \vec{j} \sim A.m^{-2}, I \sim A.m^{-1}, \sigma \sim S.m^{-1},$$

ce qui ne change rien aux unités habituelles définies en 3D.

– Soit l'expérience 2D considérée est la « sommation projetée » de l'expérience 3D. Cela revient alors à imposer des courants (A) sur une courbe et non sur une surface. Les unités deviennent :

$$V \sim V, \vec{E} \sim V.m^{-1}, \vec{j} \sim A.m^{-1}, I \sim A, \sigma \sim S,$$

En particulier, \vec{j} devient une densité linéique de courant et σ devient une conductance.

Remarque II.2 (Bilinéarité de (II.3)).

Les grandeurs ci-dessus (vectorielles ou scalaires) sont des distributions sur Ω . Ainsi, si (II.1) et (II.2) sont linéaires au sens où $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ et div sont des opérateurs linéaires sur Ω , il est important de voir que (II.3) n'établit pas une simple dépendance linéaire entre \vec{j} et \vec{E} . En effet, l'application :

$$(\sigma, \vec{E}) \mapsto \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.4})$$

est *bilinéaire*, i.e. linéaire en \vec{E} à σ fixé et réciproquement.

Les équations (II.1), (II.2) et (II.3) contiennent toute la mathématique interne du problème. Leur combinaison, grâce à l'apport de conditions aux limites ainsi que le choix de variables adéquates, aboutit à une formulation explicite du problème. Dans la littérature, on trouve plusieurs formulations différentes (équivalentes) pour le problème direct. Présentons tout d'abord la formulation différentielle.

4 Modèle électrique différentiel du problème direct

Une majorité d'auteurs utilise cette formulation. On pourra se référer en particulier à [Alessandrini 1988], [Sylvester et Uhlmann 1987], [Kohn et McKenney 1990] ainsi qu'à [Webster 1990], qui constitue le premier ouvrage de synthèse en TIÉ. Partons de l'équation (II.2) qui implique que le champ \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V, \quad (\text{II.5})$$

où le signe $-$, purement conventionnel, exprime que le courant descend le potentiel électrique V . Désignons par $\bar{\Omega}_j$ la portion de périmètre de l'objet où l'on impose le courant et $\bar{\Omega}_V$ la portion de périmètre où l'on impose le potentiel. Nous considérons les cas où $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_V \cup \bar{\Omega}_j$ constitue une partition de la frontière. Si $\bar{\Omega}_V \neq \emptyset$ ou $\bar{\Omega}_j \neq \emptyset$, le problème est dit *mixte*. Le modèle mathématique de l'expérience tient tout entier dans les trois équations qui suivent. La première est l'équation de Poisson prise dans le cas particulier où le second membre est nul — équation elliptique [Davies 1980, Renardy et Rogers 1993] de Poisson-Laplace —, *i.e.* :

$$\text{div}(\sigma \overrightarrow{\text{grad}}V) = 0 \quad (\text{II.6})$$

avec sur $\bar{\Omega}_V$ une condition aux limites de type Dirichlet :

$$V = V_{\bar{\Omega}_V}(s), \quad s \in \bar{\Omega}_V \quad (\text{II.7})$$

et sur $\bar{\Omega}_j$ une condition aux limites de type Neumann :

$$\sigma \frac{\partial}{\partial \vec{n}} V = j_{\bar{\Omega}_j}(s), \quad s \in \bar{\Omega}_j \quad (\text{II.8})$$

où $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ opère une dérivée normale extérieure (à la frontière) et s est une mesure linéique de distance sur cette même frontière. En deux dimensions, l'équation (II.8) peut s'exprimer sous la forme de conditions aux limites de type Dirichlet. En effet, dans ce cas, tout vecteur de divergence nulle dérive orthogonalement d'une fonction flux :

$$\text{div } \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \vec{j} = (\overrightarrow{\text{grad}}I)^\perp, \quad (\text{II.9})$$

sachant que $(x, y)^\perp = (-y, x)$. I est appelé le flux de courant (couramment le courant). En particulier, la composante normale j_p sur $\bar{\Omega}_j$ détermine les valeurs du courant sur le périmètre :

$$I_{\bar{\Omega}_j}(s) = \int j_{\bar{\Omega}_j} ds'.$$

Ce scalaire s'interprète comme suit. Si $s_2 > s_1$, alors $I_{\bar{\Omega}_j}(s_2) - I_{\bar{\Omega}_j}(s_1)$ est le courant *sortant* du domaine entre les points d'abscisse curviligne s_1 et s_2 . La condition aux limites (II.8) se traduit alors sur $\bar{\Omega}_j =: \bar{\Omega}_I$ par :

$$I = I_{\bar{\Omega}_I}(s), \quad (\text{II.10})$$

où $I_{\bar{\Omega}_I}(s)$, comme $V_{\bar{\Omega}_V}(s)$, est donné à une constante près.

La résolution de cette EDP n'aboutit pas, en règle générale, à des solutions analytiques explicites. Nous mentionnons néanmoins dans l'annexe de ce chapitre deux cas très particuliers où de telles solutions existent (*i.e.*, où Ω et \bar{I} ont des formes très simples).

Par ailleurs, on peut rencontrer une autre présentation de la formulation différentielle. Quelques auteurs comme [Barber et Brown 1986] ou [Goussard 1992] ont opté pour une écriture différente de (II.6) (valable si σ est strictement positif). On utilise pour cela la formule suivante :

$$\operatorname{div}(a \overrightarrow{\operatorname{grad}} U) = a \Delta U + \langle \overrightarrow{\operatorname{grad}} a, \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \rangle,$$

ce qui donne, en introduisant dans (II.6) la log-conductivité $\gamma := \log \sigma$:

$$\Delta V + \langle \overrightarrow{\operatorname{grad}} \gamma, \overrightarrow{\operatorname{grad}} V \rangle = 0. \quad (\text{II.11})$$

Bien que la manipulation d'une telle formulation soit plus délicate analytiquement, l'emploi de la log-conductivité (ou de son opposé, la log-résistivité) permet de travailler dans \mathbb{R} et non plus dans \mathbb{R}^{+*} . De plus, ainsi que nous l'avons mentionné au chapitre I § 3.4.1, cette variable, qui apparaît comme une paramétrisation plus pertinente de la grandeur à estimer, permet, lors de la reconstruction, de moins pénaliser les hautes conductivités (ce qui va dans le sens d'une meilleure estimation des distributions de conductivités contrastées) et de mieux pénaliser les très basses conductivités.

Remarque II.3 (Lien entre les conditions aux limites).

Il est important de remarquer que l'apport des conditions aux limites ne peut se faire indépendamment pour \bar{V} et \bar{I} . Si cette remarque semble trivialement valable pour un σ donné, il faut aussi noter que cela reste vrai pour une conductivité σ que l'on recherche. En particulier, si on se donne indépendamment \bar{V} et \bar{I} dans \mathbb{R} , il n'existe pas en règle générale, loin s'en faut, de σ correspondant vérifiant ces conditions aux limites. On peut montrer que \bar{V} et \bar{I} appartiennent en fait à des espaces reliant leur régularité : les *espaces de Sobolev*. C'est la raison pour laquelle, on ne peut se donner « d'entrée » des données de sortie. On est obligé de les construire en résolvant le problème direct car l'espace image de l'application (ici $\mathcal{I}m[V(\sigma)]$) dépend de \bar{I} , intervenant ici comme paramètre. Toutefois, les espaces de Sobolev ne peuvent apparaître que dans le cadre des formulations intégrales du problème direct.

5 Modèle électrique variationnel ou intégral

Le cas le plus général qui nous intéresse, où Ω , σ et les conditions aux limites sont quelconques, ne permet pas d'obtenir l'expression de V sous forme analytique, même sous la forme d'un développement en série. Parmi les familles de méthodes d'approximation qui convergent, deux sont souvent utilisées : les *méthodes de différences finies*, qui se construisent naturellement à partir du modèle différentiel présenté précédemment, ou bien les *méthodes d'éléments finis*, qui proviennent plus directement de la discrétisation des formulations intégrales du même modèle.

On distingue également deux formulations intégrales. La première provient simplement de l'intégration de l'équation (II.6) sous les contraintes (II.7) et (II.8). C'est elle qu'on appelle couramment *formulation intégrale* (cf. [Zienkiewicz et Taylor 1989]). Elle permet d'utiliser la méthode des moments pour la résolution par éléments finis. Nous lui préférons la formulation *variationnelle* qui permet d'utiliser la méthode de Rayleigh pour la résolution par éléments finis (cf. chapitre III). Elle diffère de peu sous sa présentation de la précédente mais elle possède une interprétation physique en terme de bilan énergétique sur le domaine que ne possède pas la première. C'est donc celle-ci que nous présentons maintenant.

5.1 Principe de la formulation variationnelle

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, l'approche variationnelle n'est pas, du point de vue du mathématicien, rigoureusement équivalente à l'approche différentielle. Celle-ci possède en effet l'inconvénient de pouvoir faire intervenir des fonctions non dérivables en certains points. Ceci a pour conséquence d'empêcher jusqu'à l'existence de solution pour le problème direct, alors que la difficulté n'apparaît qu'en un petit nombre de points. En particulier, la formule d'échange de dérivation de Green,

$$\int u \frac{\partial v}{\partial s} ds = - \int v \frac{\partial u}{\partial s} ds, \quad (\text{II.12})$$

n'a de sens que si $\frac{\partial u}{\partial s}$ est définie partout. Cette difficulté est surmontée grâce à l'introduction de la dérivation au sens faible, dans le cadre des distributions. Dans ce dernier en effet, l'échange de dérivation (II.12) est licite, ce qui permet de montrer l'existence de solutions dans des espaces de *Sobolev*. Pour plus de détails à ce sujet, on pourra se référer à la bibliographie concernant les distributions et la résolution des équations aux dérivées partielles, par exemple [Renardy et Rogers 1993] ou encore [Kardestuncer et coll. 1987]. Dans la suite, sauf en cas de nécessité, nous omettons de détailler les espaces d'appartenance des distributions considérées, notre but étant de faire comprendre « physiquement » le principe de cette formulation, utilisée en particulier dans [Kohn et McKenney 1990]. Nous détaillons ici cette formulation.

Pour cela, partons de l'équation de colinéarité (II.3). Comme on ne considère que des conductivités strictement positives, on peut définir le vecteur

$$\vec{\delta c} := \sigma^{1/2} \vec{j} - \sigma^{-1/2} \vec{E} = 0,$$

vecteur homogène à la racine d'une puissance. Cette relation étant valable pour tout $M \in \Omega$, elle est équivalente à :

$$\Pi := \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \langle \vec{\delta c}, \vec{\delta c} \rangle dx dy = 0$$

soit

$$\Pi(\vec{E}, \vec{j}, \sigma) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} |\sigma^{1/2} \vec{E} - \sigma^{-1/2} \vec{j}|^2 dx dy = 0.$$

Cette intégrale signifie l'équilibre global sur le domaine, à régime stationnaire, entre la puissance « potentielle » fournie par le champ électrique et la puissance « cinétique » consommée par les charges traversant le milieu. On peut déjà remarquer que, pour annuler cette intégrale, il « suffit » de la minimiser. C'est en ce sens que cette formulation est qualifiée de *variationnelle*. C'est bien sûr cette propriété que nous utilisons lors de la résolution numérique présentée au chapitre III. Nous pouvons maintenant faire apparaître très simplement les hypothèses (II.1) et (II.2), grâce à leurs équivalents (II.9) et (II.5) :

$$\Pi(V, I, \sigma) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} |\sigma^{1/2} \overrightarrow{\text{grad}} V + \sigma^{-1/2} (\overrightarrow{\text{grad}} I)^{\perp}|^2 dx dy. \quad (\text{II.13})$$

Développons le carré sous l'intégrale :

$$\Pi(V, I, \sigma) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\sigma |\overrightarrow{\text{grad}} V|^2 + \sigma^{-1} |\overrightarrow{\text{grad}} I|^2 + 2 \langle \overrightarrow{\text{grad}} V, (\overrightarrow{\text{grad}} I)^{\perp} \rangle \right] dx dy.$$

Le troisième terme de ce bilan d'énergie ne fait pas intervenir la conductivité σ . Il correspond donc à l'énergie venant de l'extérieur pour compenser la consommation d'énergie (strictement positive) par effet Joule à laquelle sont associés les deux premiers termes. La divergence globale du troisième terme sous l'intégrale est donc nulle, ce que traduit la formule de Green [Davies 1980] :

$$\iint_{\Omega} \langle \overrightarrow{\text{grad}} V, (\overrightarrow{\text{grad}} I)^{\perp} \rangle dx dy = \int_{\bar{\Omega}_j} V \frac{\partial I_{\bar{\Omega}_I}}{\partial \vec{t}} ds - \int_{\bar{\Omega}_v} I \frac{\partial V_{\bar{\Omega}_V}}{\partial \vec{t}} ds, \quad (\text{II.14})$$

où $\frac{\partial}{\partial \vec{t}}$ représente la dérivée tangentielle orientée dans le sens trigonométrique inverse sur $\bar{\Omega}$, ce qui fait apparaître, par la même occasion, les conditions aux limites. Il vient donc :

$$\Pi(V, I, \sigma) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma |\overrightarrow{\text{grad}} V|^2 dx dy \quad (\text{II.15a})$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma^{-1} |\overrightarrow{\text{grad}} I|^2 dx dy \quad (\text{II.15b})$$

$$+ \int_{\bar{\Omega}_j} V \frac{\partial I_{\bar{\Omega}_I}}{\partial \vec{t}} ds \quad (\text{II.15c})$$

$$- \int_{\bar{\Omega}_v} I \frac{\partial V_{\bar{\Omega}_V}}{\partial \vec{t}} ds, \quad (\text{II.15d})$$

ce qui donne, compte tenu de la formule d'échange de dérivation de Green (II.12) sur $\bar{\Omega}$,

$$\boxed{\Pi(V, I, \sigma) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [\sigma |\overrightarrow{\text{grad}} V|^2 + \sigma^{-1} |\overrightarrow{\text{grad}} I|^2] dx dy + \int_{\Omega} V \frac{\partial I_{\bar{\Omega}}}{\partial \bar{t}} ds,} \quad (\text{II.16})$$

ce qui constitue la formulation variationnelle du problème, à minimiser pour résoudre le problème direct. Examinons maintenant les propriétés analytiques, déduites à partir de cette formulation, de la solution du problème direct d'une part, puis de celle du problème inverse.

5.2 Propriétés de la solution du problème direct

Remarquons tout d'abord qu'il existe une infinité d'écritures différentes du type $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_V \cup \bar{\Omega}_I$, traduisant une infinité de formulations variationnelles équivalentes pour (II.15), (II.16) étant le cas particulier de (II.15) dans lequel les conditions aux limites sur $\bar{\Omega}$ ne sont que des courants. Cette propriété, qui caractérise la stationnarité du régime entrée-sortie en courant, se traduit par l'« oubli » des conditions initiales d'excitation, donc, en particulier, par l'indiscernabilité entre les électrodes qui « imposent » le courant et celles qui le « recueillent ».

En pratique néanmoins, on peut remarquer que, pour la résolution du problème direct, on a intérêt à se placer dans un des deux cas où on impose des entrées de même nature : soit « tout courant » – comme (II.16), soit « tout tension ». En effet, sans pour autant être capable de trouver une solution analytique au système, on s'aperçoit que la résolution du système se découple. Dans le cas *tout courant* ($[I, \sigma] \rightarrow V$) par exemple, où on minimise (II.16) en dérivant Π par rapport à V , il apparaît que la solution V^* ne dépend pas de I tout entier mais du seul $I_{\bar{\Omega}}$ et réciproquement dans le cas *tout tension*. De plus, nous pouvons noter (*cf.* Fig. II.2) que dans ce cas, la résolution du problème en I , si elle est possible, peut s'effectuer avec le même système que la résolution en V , en remplaçant σ par σ^{-1} et \bar{I} par $-\bar{V}$ dans (II.16). Cette symétrie s'avère en particulier très utile lors de la vérification de la méthode de résolution par éléments finis.



FIG. II.2 - Symétrie de la résolution du problème direct avec la formulation intégrale. La résolution du problème $V, \sigma \rightarrow I$ s'effectue avec le même opérateur que le problème $I, \sigma \rightarrow V$, en permutant les entrées à un signe près et en inversant la conductivité.

Nous présentons maintenant trois théorèmes permettant de souligner certaines propriétés importantes de la solution du problème direct. Les deux premiers théorèmes sont un

rappel des résultats classiques des solutions des EDP. Pour plus d'informations, on pourra consulter des ouvrages tels que [Kardestuncer et coll. 1987] ou [Renardy et Rogers 1993].

Théorème II.1 (Existence et unicité).

Dans le cadre de l'hypothèse tout courant, si $\bar{\Omega}$ est un contour topologiquement C^∞ , alors, moyennant une régularité suffisante de \bar{I} – i.e., telle que l'équation (II.16) ait un sens, on a :

- i. il existe une solution faible V minimisant (II.16) ;*
- ii. cette solution est unique, à une constante additive près ;*
- iii. elle a la même régularité que \bar{I} (i.e., appartient à un espace de Sobolev de mêmes degrés que \bar{I}).*

Ce théorème appelle quelques commentaires. D'abord, d'après *ii*, on voit que les conditions aux limites dites *naturelles* sur \bar{I} ne suffisent pas pour assurer l'unicité de la solution. La condition de Dirichlet sur V , dite *condition aux limites essentielle*, doit en fait être fournie au minimum sur un point (qui peut tout à fait appartenir à l'intérieur $\overset{\circ}{\Omega}$ de Ω). La formulation différentielle permet aussi de montrer cette propriété puisque l'opérateur laplacien Δ filtre la moyenne. Ensuite, d'après *i*, l'existence d'une solution *faible* signifie une solution au sens des distributions. Il faut souligner que les conditions de validité de ce théorème demeurent très générales. En effet, dans la plupart des cas rencontrés en pratique, la solution existe, non seulement au sens des distributions mais aussi au sens des fonctions. C'est le cas en particulier lorsque $\bar{\Omega}$ est polygonal (*cf.* l'exemple de l'annexe où $\bar{\Omega}$ est un carré),

Une autre propriété intéressante caractérise la solution :

Théorème II.2 (Principe des extrema).

Comme pour de nombreux problèmes dont la formulation s'écrit sous la forme d'une équation aux dérivées partielles elliptique du type $\Delta u = 0$, les distributions solutions V et I , dites harmoniques, possèdent les propriétés suivantes :

- V et I sont bornés ;*
- leurs extrema sont atteints sur la frontière $\bar{\Omega}$.*

Ce théorème est la traduction à deux dimensions (et plus) de la propriété selon laquelle tout potentiel mesuré à l'intérieur d'un dipôle passif traversé par un courant est compris entre les potentiels d'entrée et de sortie.

Le troisième théorème résulte d'une étude déjà plus spécifique réalisée en vue du problème inverse.

Théorème II.3 (Stabilité [Calderon 1980]).

La fonctionnelle donnée par $\sigma \mapsto \bar{V}_{\bar{I}}$ est analytique, donc continue.

Les théorèmes II.1 et II.3 attestent donc que le problème direct, dans son expression analytique, est *bien posé* au sens de Hadamard, *i.e.*, la solution existe, est unique (à une constante près) et continue par rapport aux variables d'entrée – ici, \bar{I} (II.1) et σ (II.3).

Voyons maintenant ce qu'il en est pour le problème inverse.

5.3 Propriétés de la solution du problème inverse

L'article [Calderon 1980] d'où est tiré le théorème II.3 est à l'origine de nombreuses études visant à prouver le caractère « bien posé » du problème inverse. La décennie 80 a vu successivement paraître des articles tels que ceux de [Kohn et Vogelius 1984] et de [Sylvester et Uhlmann 1987] montrant, dans le cas multidimensionnel ($n \geq 3$) et pour des distributions de conductivité suffisamment « douces », que le problème inverse est bien posé. Le cas le plus général a été démontré dans [Alessandrini 1988] dont nous donnons un énoncé simplifié dans le théorème suivant :

Théorème II.4 (Détermination stable de la conductivité).

Soient σ_1 et σ_2 deux distributions de conductivité non dégénérées. Alors, dans le cas multidimensionnel ($n \geq 3$), il existe $C > 0$ et $\delta \in]0, 1[$ tels que :

$$\boxed{\|\sigma_1 - \sigma_2\| \leq C |\log[|\bar{V}_{\bar{I}}(\sigma_1) - \bar{V}_{\bar{I}}(\sigma_2)|]|^{-\delta}}, \quad (\text{II.17})$$

pourvu que $\bar{V}_{\bar{I}}(\sigma_1)$ et $\bar{V}_{\bar{I}}(\sigma_2)$ soient suffisamment proches (cf. Fig. II.4).

Les normes utilisées sont les normes d'appartenance des grandeurs aux espaces de Sobolev. Ce théorème fournit donc une majoration établissant l'unicité et la dépendance continue liant la conductivité aux observations : le problème inverse est donc lui aussi, « bien posé ». Toutefois, on peut remarquer que la fonction $|\log t|^{-\delta}$ admet une dérivée infinie en $t = 0$, ce qui signifie, si la majoration est faite « au plus juste », que l'on se situe, parmi les cas « bien posés », à la limite de l'instabilité.

Nous n'avons pas relevé à ce jour, hormis pour une conductivité quasi constante ([Sylvester et Uhlmann 1987]), de démonstration équivalente pour le cas bidimensionnel.

Remarque II.4 (Signification pratique du théorème II.4).

La portée pratique de ce résultat est limitée. En effet, \bar{V} et \bar{I} ne sont pas parfaitement accessibles, d'une part à cause du nombre fini d'électrodes utilisées et d'autre part parce que les grandeurs relevées sont entâchées de bruit. De plus, on devine qu'il sera nécessaire, pour pouvoir fournir une estimation de bonne qualité de la conductivité, d'introduire plusieurs jeux d'observations indépendantes dans les méthodes de reconstruction. Ce résultat est néanmoins intéressant car il donne, à l'avance, une idée de la difficulté et de la haute instabilité numérique des méthodes d'inversion non régularisées en TIÉ.

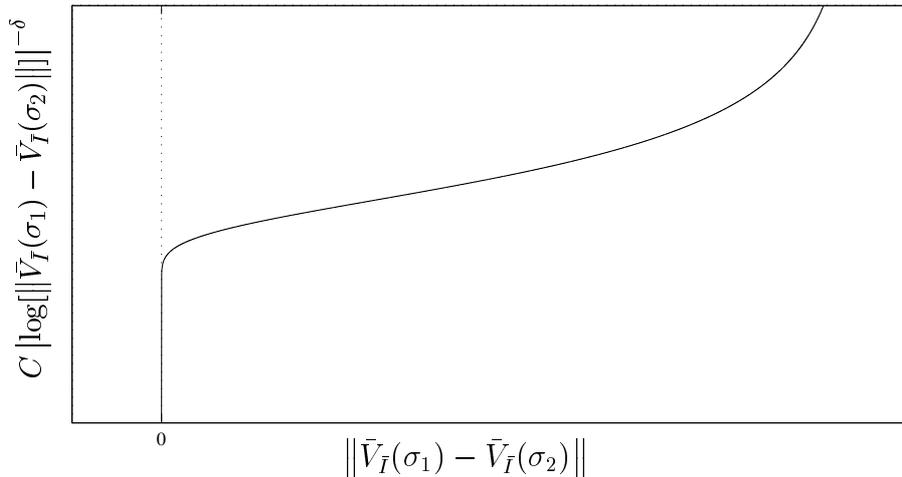


FIG. II.3 - Théorème II.4 : comportement qualitatif ($\delta = 0.2$) du majorant de l'écart relevé sur deux potentiels observés en fonction de la distance séparant les deux distributions de conductivité qui les ont générées. Le courant imposé est le même pour les deux distributions de conductivité. On observe bien une continuité en 0, avec cependant une dérivée infinie, révélant la forte « contrainte » exercée sur la frontière $\bar{\Omega}$, laquelle doit accumuler suffisamment d'informations pour caractériser l'intérieur du domaine Ω .

6 Annexe : exemples de solutions analytiques

Nous présentons ici deux des rares exemples où il existe des expressions analytiques de la solution. Ces résultats permettent de se donner, pour le cas général quelconque, des repères sur le comportement qualitatif des grandeurs invoquées.

6.1 Domaine Ω carré et conductivité σ uniforme

Pour ce calcul, partons des équations aux dérivées partielles. Dans notre exemple [Davies 1980], on n'impose que des tensions de sorte que seules les équations (II.6) et (II.7) sont nécessaires. Dans le cas où la conductivité est choisie uniformément égale à 1, l'équation (II.6) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{II.18})$$

Les conditions aux limites choisies dans notre exemple sont les suivantes :

$$V(0, y) = 0, \quad (\text{II.19a})$$

$$V(1, y) = 0, \quad (\text{II.19b})$$

$$V(x, 0) = 0, \quad (\text{II.19c})$$

$$V(x, 1) = \sin \pi x, \quad (\text{II.19d})$$

avec $(x, y) \in [0, 1]^2$. La solution de cette EDP est calculable en séparant les variables, *i. e.*, en posant :

$$V(x, y) = U_1(x)U_2(y).$$

Dès lors, (II.18) s'écrit avec des dérivées droites de U_1 et U_2 :

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2}(x)U_2(y) + \frac{d^2 U_2}{dy^2}(y)U_1(x) = 0,$$

ce qui équivaut, pour tout point où U_1 et U_2 sont non nuls, à :

$$\frac{U_1''(x)}{U_1(x)} = -\frac{U_2''(y)}{U_2(y)},$$

ce qui, étant donnée l'indépendance des deux membres, implique que chacun d'entre eux est une constante :

$$\frac{U_1''(x)}{U_1(x)} = -\frac{U_2''(y)}{U_2(y)} = \lambda.$$

Nous avons donc deux systèmes séparés qui donnent :

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2}(x^2) = \lambda U_1(x), \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{d^2 U_2}{dy^2}(y^2) = -\lambda U_2(y). \quad (\text{II.21})$$

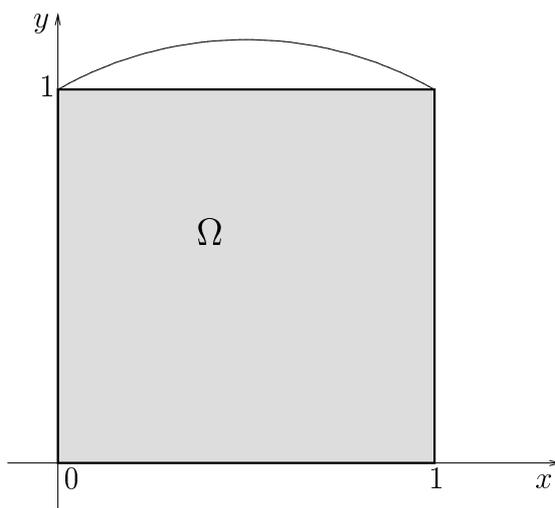


FIG. II.4 - *Domaine carré avec une distribution de conductivité uniforme. Une solution analytique est alors calculable. Dans notre exemple, où c'est la tension qui est imposée sur $\bar{\Omega}$, celle-ci est nulle sur tout le périmètre, sauf sur le côté supérieur où elle est sinusoïdale.*

La résolution classique de ces équations différentielles conduit à l'expression générale suivante :

$$V(x, y) = A[\exp(\sqrt{\lambda}x) + B \exp(-\sqrt{\lambda}x)][\exp(\sqrt{-\lambda}y) + C \exp(-\sqrt{-\lambda}y)]. \quad (\text{II.22})$$

Imposer les trois premières conditions aux limites réduit la famille (II.22) à la collection dénombrable de solutions qui suivent :

$$V(x, y) = A \sin n\pi x \operatorname{sh} n\pi y, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dans le cas où $n = 1$ et $y = 1$, cette expression s'écrit

$$V(x, y) = A \operatorname{sh} \pi \sin \pi x,$$

ce qui est vérifié par la quatrième condition aux limites si

$$A = \frac{1}{\operatorname{sh} \pi}.$$

L'expression analytique de l'unique solution est donc :

$$V(x, y) = \frac{\sin \pi x \operatorname{sh} \pi y}{\operatorname{sh} \pi}. \quad (\text{II.23})$$

On notera que si la quatrième condition aux limites n'est pas sinusoïdale mais quelconque, une solution analytique est toujours envisageable par décomposition de l'expression de cette condition en série de Fourier [Renardy et Rogers 1993].

6.2 Ω circulaire, σ en chapeau

Ici, nous considérons, sur un domaine Ω circulaire paramétré par $0 \leq r \leq 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, une inhomogénéité circulaire *en chapeau* centrée définie par :

$$\sigma_1 = \sigma_1(r, \theta) = \begin{cases} \sigma & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ 1 & \text{si } R < r \leq 1. \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Si la densité de courant à la frontière est décomposable en série de Fourier :

$$j(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta \quad (\text{II.25})$$

alors, en posant

$$\mu = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}, \quad (\text{II.26})$$

la solution de $\Delta V = 0$, dont la démonstration repose sur la même méthode de séparation des variables, est donnée par :

$$\bar{V}(\theta; \sigma_1, j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1 - \mu R^{2n}}{1 + \mu R^{2n}} (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta). \quad (\text{II.27})$$

Cette expression est particulièrement intéressante (*cf.* [Isaacson 1986] et [Webster 1990]) car elle permet de déterminer le « pouvoir séparateur » de l'expérience de TIÉ, c'est-à-dire la capacité, en fonction du RSB en sortie, de faire la distinction entre une zone circulaire de diamètre R de conductivité σ et une zone de conductivité uniforme valant 1.

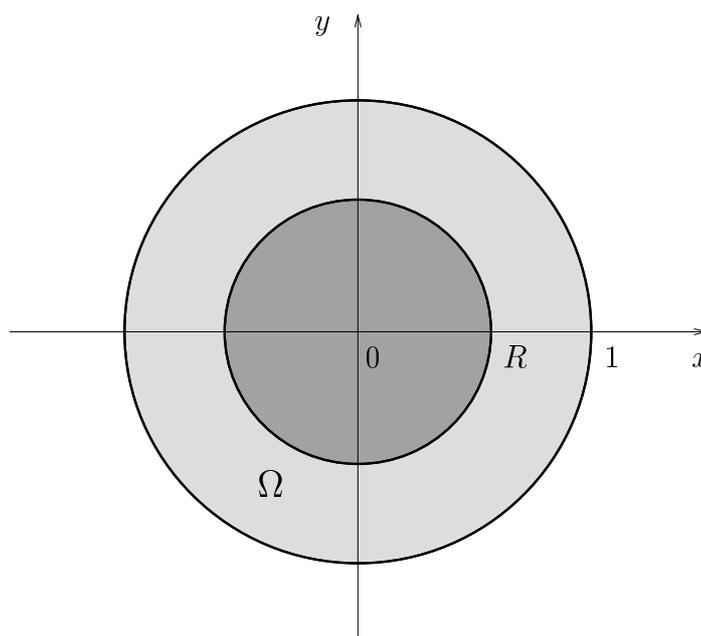


FIG. II.5 - *Domaine circulaire Ω . La distribution de conductivité est en forme de chapeau : σ constante sur un disque centré de rayon R , et valant 1 sur le reste du disque unité.*

De plus, l'équation (II.27) s'avère particulièrement utile pour mesurer les erreurs de discrétisation introduites lors de la résolution du problème par la méthode des éléments finis (*cf.* chap. III § 6.2).

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DIRECT DE TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre II qu'il n'existe pas, dans le cas général, de solution explicite pour résoudre la formulation analytique du problème direct de TIÉ. Il faut donc utiliser une solution approchée numériquement. Nous avons aussi remarqué que la résolution du problème direct s'obtient simplement par dérivation de la formulation variationnelle (II.16). Enfin, dans le chapitre I, nous avons vu que le *modèle mathématique* complet comporte, en amont et en aval du *modèle analytique*, des étages de modélisation des mesures permettant d'intégrer les observations (numériques) que sont en TIÉ les mesures de courants et de tension.

Dans le présent chapitre, nous commençons par présenter le modèle de mesure numérique des distributions de courant et de tension que nous adoptons. Ensuite, après une brève description des modèles approchés envisageables, nous proposons une approximation de la formulation variationnelle de TIÉ par la méthode des éléments finis (MÉF). Puis, à partir de cette approximation et du modèle de mesure, nous construisons le *modèle discrétisé* de résolution du problème direct que nous utilisons dans la suite pour l'inversion. Enfin, nous montrons, aussi bien par des résultats quantitatifs que qualitatifs, que la qualité d'approximation ainsi obtenue par la MÉF est suffisante en vue de la résolution du problème inverse.

La littérature générale sur la MÉF est abondante. On trouve nombre d'ouvrages de synthèse tels que [Strang et Fix 1973], [Davies 1980], [Marchouk et Agochkov 1981], [Kardestuncer et coll. 1987], [Zienkiewicz et Taylor 1989], [Nedelec 1991]... La résolution du problème TIÉ est un cas relativement simple de mise en œuvre de la MÉF. Aussi, en particulier dans [Davies 1980], la résolution MÉF du problème TIÉ, est parfois donnée en illustration, sans toutefois être grandement détaillée. Dans la littérature spécifique à la TIÉ, lorsque les auteurs utilisent la MÉF pour résoudre le problème direct, peu de détails, hormis dans [Webster 1990], sont accordés à la présentation de la résolution MÉF

du problème direct. La MÉF est désormais considérée comme un outil connu qui vient s'insérer dans la méthode d'inversion proposée par l'auteur.

C'est pourquoi nous choisissons de donner ici une présentation détaillée de l'approximation de (II.16). Il nous a paru en effet important de développer les points suivants :

- Nous opérons ici une discrétisation de la formulation variationnelle (II.16) par la MÉF. Certaines propriétés sont conservées lors de cette approximation telles que la définie-positivité et le découplage courant/tension. D'autres sont perdues. En particulier, on ne peut plus annuler exactement l'intégrale (II.16) définie précédemment, ce qui va induire plusieurs modèles différents, quoique comparables, pour les observations.

- Ces modèles possèdent la propriété théorique de convergence vers la solution exacte lorsqu'on diminue la taille des éléments : l'*erreur de discrétisation* tend vers zéro. Aussi, pourvu qu'on n'ajoute pas d'approximation supplémentaire à celles effectuées lors de la discrétisation, ces modèles d'observations préservent « naturellement » la dépendance non linéaire des observations vis-à-vis de la conductivité.

- En pratique, cette propriété théorique de convergence est à tempérer par l'instabilité numérique due à la limitation des calculateurs : pour des hautes précisions, le modèle des observations peut s'avérer numériquement instable par amplification des *erreurs d'arrondi*. Toutefois, nous montrons que les méthodes d'inversion ne requièrent pas une précision telle qu'on aboutisse à des instabilités numériques sur des calculateurs double-précision. Par conséquent, l'identification opérée au chapitre I entre le *modèle discrétisé* et le *simulateur numérique* est valable, si bien que le problème direct ne nécessite pas de régularisation. De plus, sans utiliser une discrétisation excessivement fine, la MÉF fournit des résultats d'une précision suffisante pour un coût de calcul très peu élevé.

2 Modélisation numérique des mesures de courant et de tension

Nous optons ici pour la modélisation numérique des mesures la plus simple possible. Si nous notons $\bar{\mathbf{v}}$ et $\bar{\mathbf{i}}$ les vecteurs contenant les \bar{N} mesures, nous considérons que ces vecteurs contiennent exactement les valeurs échantillonnées respectives de \bar{V} et \bar{I} sur \bar{N} points de la frontière $\bar{\Omega}$ (points que l'on suppose répartis de manière suffisamment régulière pour que les mesures aient un sens). Cela revient à choisir un « modèle parfait » d'électrode, *i.e.*, d'une part des électrodes de mesure de tension *ponctuelles* situés exactement aux points de mesures avec une impédance de sortie infinie et d'autre part une ceinture d'électrodes continue presque partout imposant le courant entre les points de mesure des courants avec une impédance d'entrée nulle.

Hormis sa simplicité, cette modélisation numérique des mesures possède l'avantage d'être directement discrétisable avec la MÉF si les nœuds du domaine discrétisé sont situés aux emplacements des électrodes de mesure des tensions tandis que les facettes extérieures des mailles triangulaires (*cf.* un peu plus loin la figure III.3) situées sur la

frontière correspondent exactement aux emplacements d'imposition continue du courant. Cette modélisation sous forme de *ceinture d'électrodes* est très proche de celle utilisée dans [Webster 1990] et [Hua et coll. 1991], à partir de laquelle les auteurs ont traité des données réelles.

Le principal inconvénient de cette modélisation des mesures réside dans le fait qu'une grande partie des méthodes expérimentales se contente d'apposer des électrodes sur 10 à 30 pourcents de la frontière. Le travail présent reflète donc moins efficacement les capacités de traitement envisageables à partir de données obtenues avec ces méthodes. Toutefois, comme l'indiquent (entre autres) les travaux de [Cohen-Bacrie 1994] ou ceux de [Fox et Nicholls 1997], la MÉF ou la méthode des différences finies demeurent encore dans ce cas très adaptées à la construction du modèle direct de TIÉ.

Dans la suite de cette étude, nous nous plaçons donc dans ce cadre expérimental optimal que constitue la ceinture d'électrode de façon à pouvoir étudier les meilleures résolutions envisageables avec la TIÉ.

3 Modèles approchés existants en TIÉ

On trouve dans la littérature une grande variété d'approximations pour la résolution d'équations aux dérivées partielles qui sont susceptibles d'être utilisées en TIÉ. Nous pouvons les regrouper en trois catégories.

3.1 Les méthodes *analytiques*

Les méthodes analytiques consistent à approcher le modèle par des fonctions analytiques tabulées (sinusoïdes, fonctions de Bessel ou de Green . . .) suffisamment complexes pour décrire avec fidélité la réponse du système. Néanmoins, pour être valables, elles nécessitent souvent des hypothèses particulières très fortes sur la forme du domaine et sur la conductivité (*e.g.*, le domaine doit être circulaire ainsi que les inhomogénéités [Isaacson 1986]). L'avantage, si ces hypothèses sont vérifiées, est que la résolution de l'inversion peut se ramener à l'estimation d'un petit nombre de variables que l'on appelle *paramètres* en raison de la diversité d'unités qui les caractérise : typiquement en TIÉ, le rayon (en m) et l'amplitude (en $\Omega.m$) d'une inhomogénéité circulaire. C'est la raison pour laquelle les méthodes d'inversion construites à partir des modèles directs analytiques sont qualifiées de *paramétriques* [Walter et Pronzato 1994]. Toutefois, il arrive que ces fonctions soient difficiles à tabuler avec précision, surtout dans le cas où la tabulation ne peut être mise en oeuvre qu'après les observations (si elle en dépend). Dès lors, un compromis *précision / temps de calcul* intervient qui peut faire perdre en précision la qualité que l'on tenait à garder avec des fonctions relativement complexes. En TIÉ, on trouvera des exemples d'approximations analytiques dans [Inman et coll. 1973] (domaines infinis), [Goussard 1992], [Dobson et Santosa 1994], [Somersalo et coll. 1991].

3.2 Les méthodes *discrètes*

Au contraire des méthodes précédentes, les méthodes discrètes approchent le modèle par projection sur une base de fonctions polynômiales très simples (constantes, d'ordre 1 ou 2) sur des morceaux du domaine lui-même discrétisé, appelés *éléments* dont les sommets sont appelés *nœuds*. Dans les *méthodes de différences finies* (MDF), ce sont les opérateurs différentiels que l'on essaie d'approcher tandis que dans les *méthodes d'éléments finis* (MÉF), c'est directement la fonctionnelle qui est approchée par une fonction de base dont le support est l'*élément*. On peut réinterpréter les MDF comme une MÉF dont les fonctions de base s'apparentent à des dirac sur les nœuds. Les MÉF et les MDF convergent vers la solution exacte du système lorsque le nombre d'éléments augmente mais aussi, pour les MÉF, lorsque l'ordre des fonctions de base augmente. Ces méthodes se déclinent donc sous de nombreuses formes. Nous désignons dans la suite par MÉF, aussi bien les méthodes d'éléments finis prises dans leur ensemble qu'une méthode MÉF particulière. La relative simplicité de la MDF et de la MÉF les rend immédiatement adaptées aux méthodes d'imagerie, le pixel étant alors défini soit comme un élément soit comme un nœud. L'inconvénient de ces méthodes réside bien sûr dans une plus grande imprécision de l'approximation par rapport aux méthodes analytiques. Toutefois, ce défaut ne se fait sentir en pratique que pour un très faible nombre d'éléments. En effet, même à faible nombre d'éléments, un domaine quelconque est souvent mieux représenté par un modèle discret mais souple que par un modèle analytique puissant mais rigide. En TIÉ, c'est surtout la MÉF qui a été utilisée : [Murai et Kagawa 1985], [Wexler et coll. 1985], [Yorkey et coll. 1987], [Webster 1990], [Kohn et McKenney 1990], [Woo et coll. 1992], ... Une autre méthode discrète a aussi été utilisée : la modélisation par *réseau de résistances équivalentes*. La construction de cette modélisation à partir des loi de Kirchoff est plus aisée que la mise en œuvre de la MÉF. Toutefois, la représentation géométrique en résistances et en circuits équivalents (qui sont des éléments 1D) semble moins adaptée à l'imagerie que la MÉF qui intègre complètement les caractéristiques 2D du problème. Pour plus de détails sur ce type de méthode, on pourra se référer à [Price 1979] et [Dines et Lytle 1981].

Remarque III.1 (Deux grandes familles de MÉF).

Avant de développer, soulignons qu'il existe deux grandes familles de méthodes pour construire des approximations par éléments finis [Zienkiewicz et Taylor 1989].

- On trouve d'une part la *méthode des résidus* ou *méthode des moments*. Elle consiste à décomposer les équations sur des fonctions de base en les projetant sur une famille de fonctions de test [Harrington 1987]. Elle revient algébriquement à essayer d'annuler un produit scalaire, en résolvant un système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Dans le cas particulier de la méthode de Petrov-Galerkin qui est la plus répandue, les fonctions de test sont semblables aux fonctions de base. Ces méthodes sont surtout utilisées dans le cas où il n'existe pas de formulation variationnelle.

- On trouve d'autre part les *méthodes variationnelles*. Elles nécessitent l'existence d'une formulation intégrale dont la solution coïncide avec un point stationnaire. Ces cas

sont assez répandus : Rayleigh a établi que ce principe de stationnarité caractérise de nombreux phénomènes de la physique. La décomposition sur des fonctions de base est obtenue en annulant un gradient (méthode de Ritz), ce qui aboutit aussi à résoudre un système linéaire. Ces méthodes possèdent l'avantage, lorsque l'équation intégrale est positive (ce qui est le cas en TIÉ), de conduire systématiquement à une matrice \mathbf{A} définie positive. Ceci permet de construire directement, non pas une approximation du modèle direct mais une approximation de la formulation variationnelle elle-même, laquelle induit «naturellement» deux modèles discrets différents : un permettant de calculer les tensions à partir des courants au bord ($\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbf{v}$), l'autre de calculer les courants à partir des tensions au bord ($\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{i}$). L'utilisation conjointe de ces deux approximations (duales) permet d'évaluer, en discret, l'intégrale positive «résiduelle» de la formulation variationnelle, ce qui offre l'avantage de pouvoir quantifier simplement la qualité d'approximation par la MÉF. Dans la suite, nous présentons donc de manière distincte l'approximation de la formulation variationnelle et les modèles discrets du problème direct qui en résultent. Par ailleurs, pour la TIÉ, on peut montrer ([Zienkiewicz et Taylor 1989]) que la méthode de Galerkin construite à partir de l'EDP (II.6) ne conduit qu'à un seul modèle discret $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbf{v}$, qui est exactement celui obtenu à partir de la formulation variationnelle.

3.3 Les méthodes *mixtes*

Nous appelons *méthode mixte* tout compromis entre les deux approches précédentes : pallier la relative déficience de précision des méthodes discrètes à faibles nombre d'éléments tout en gardant une souplesse d'adaptation au domaine Ω . On trouve d'abord les méthodes de *moments* qui englobent les méthodes MÉF et MDF mais dont les fonctions de base peuvent être choisies avec un support plus large allant jusqu'au domaine discrétisé tout entier. Ces méthodes sont souvent utilisées conjointement avec des fonctions (pré- ou post-) tabulées comme les fonctions de Green identifiées, par exemple, pour des applications en géophysique comme la tomographie de diffraction [Howard et Kretzschmar 1986]. Ces méthodes, qui sont algorithmiquement plus lourdes d'utilisation car elles n'engendrent pas de matrices creuses comme la MDF ou la MÉF, sont peu utilisées en TIÉ. On trouve en revanche en TIÉ, entre autres, la méthode des *éléments frontières* (MÉFr), qui utilise les propriétés analytiques de solutions calculées dans le cas où Ω est circulaire pour approcher la conductivité par un ensemble de petites zones conductrices circulaires appelées éléments frontières (*cf.* [Marsili et coll. 1992], [Mirabel et Marsili 1996]).

4 Approximation discrète de la formulation variationnelle par la MÉF

Nous optons ici pour la MÉF, en raison de sa souplesse, de sa simplicité et de sa facilité d'emploi en imagerie. De plus, dans la plupart des cas, sur des domaines discrétisés avec quelques centaines d'éléments, nous constatons que la précision de la méthode que nous développons se ramène à un rapport *signal / bruit de modèle* compris entre (au pire) 40 et 70 dB, ce qui est non seulement amplement suffisant, mais qui constitue aussi une nette amélioration (difficilement quantifiable) par rapport aux méthodes analytiques, dans le cas (réaliste) où les géométries du domaine et de la conductivité sont quelconques. Enfin et surtout, cette méthode conserve la dépendance non linéaire des observations vis-à-vis de la conductivité, ce qui doit permettre d'estimer des conductivités fort contrastées, pour lesquelles les approximations linéaires ne sont plus valables.

Ce paragraphe présente la discrétisation de la formulation variationnelle qui constitue la première étape en vue du calcul de l'approximation MÉF en TIÉ. Dans le paragraphe § 4.1, nous choisissons pour la MÉF une approximation polynômiale (d'ordre 1 pour V et I et 0 pour σ) avec un maillage reposant sur une triangularisation du domaine. Ceci nous permet, en § 4.4, de proposer une écriture originale de la discrétisation MÉF de la formulation variationnelle destinée à :

- donner une écriture *algébrique* de la formulation variationnelle Π de l'équation (II.16) alors qu'habituellement, ce caractère *algébrique* n'intervient qu'à l'étape suivante qui est celle de la résolution ;
- montrer, de manière simple, la définie positivité de cette formulation. Or, si Π est positif, il constitue un critère et c'est ce critère que l'on essaie, pour résoudre le problème direct, d'annuler en le minimisant. La valeur résiduelle (très proche de zéro) que Π prend après résolution peut donc servir à donner une estimation simple de l'erreur de discrétisation (*cf.* § 6).
- donner à cette formulation discrète une forme compacte afin de faciliter l'étape de résolution et de mettre en évidence le rôle de la conductivité en vue du problème inverse.

4.1 Choix de la structure MÉF

Les notations que nous adoptons ici sont proches de celles adoptées dans [Davies 1980]. Dans la MÉF une distribution $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est approchée par une somme de fonctions polynômiales dont le support se limite à un élément. Comme ces éléments revêtent souvent une forme simple (des triangles ou des rectangles en 2D), le domaine Ω est lui-même approché sous la forme d'un partitionnement polygonal :

$$\Omega_h = \bigcup_p \Omega^p$$

où les Ω^p , $p = 1..P$, sont les P éléments en question et l'indice h désigne, en notation MÉF standard, le diamètre du plus grand élément sur Ω . Dès lors, la fonction f approchée par f_h s'écrit :

$$f_h(x, y) = \sum_{p|\Omega^p \subset \Omega_h} f^p(x, y), \quad (\text{III.1})$$

où le support de f^p est Ω^p . Cette écriture est encore purement formelle. Pour revêtir un sens de décomposition sur une base et pour que la MÉF converge, certaines conditions sont nécessaires quant à l'ordre des fonctions polynômiales et à la forme du maillage [Kardestuncer et coll. 1987]. Dans notre cas, retenons simplement que :

- Les approximations V_h et I_h doivent appartenir à $\mathcal{C}^0(\Omega_h)$ (ensemble des fonctions continues sur Ω_h) pour pouvoir être dérivées ;
- Les seules intersections entre éléments doivent être, soit des sommets, soit des côtés *adjacents*, *i.e.*, commun à l'élément en vis-à-vis sur toute leur longueur (*cf.* Fig. III.1). Si les éléments choisis sont des triangles, cette contrainte permet de définir une *triangulation*.

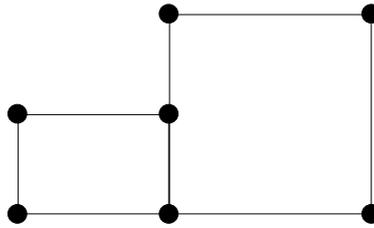


FIG. III.1 - Pour la méthode des éléments finis à éléments quadrangulaires, le nombre de nœuds doit être de quatre par maille, ce qui interdit la configuration ci-dessus car les deux côtés ne sont pas communs sur toute leur longueur.

Pour approcher les distributions I , V , et σ , par des fonctions polynômiales, il nous faut donc choisir l'ordre des polynômes et la forme de discrétisation du support Ω .

4.2 Choix de l'ordre des fonctions de base et du type de maillage

Pour déterminer une approximation de la solution, nous minimisons donc le critère $\Pi(V_h)$ avec, pour expression de la fonction test V_h approximation de V , une décomposition sur une base de fonctions de support élémentaire :

$$V_h(x, y) = \sum_{p|\Omega^p \subset \Omega_h} V^p(x, y)$$

où p désigne une maille du domaine. Cette écriture est bien sûr reproduite pour $I_h(x, y)$ et $\sigma_h(x, y)$, approximations respectives de I et σ .

La continuité est un élément essentiel de notre problème. En effet, en ce qui concerne les courants, la physique interdit des discontinuités le long des lignes d'écoulement. Aussi,

l'ordre des fonctions I_h et V_h doit être au moins égal à 1. Dans le cas où il vaut précisément 1, les fonctions V_h et I_h sont approchées par des petits morceaux de plan : les valeurs en trois points suffisent donc à définir la fonction sur un élément, ce qui incite plutôt à mailler par des triangles. L'ordre 2 nécessite 6 points par élément, l'ordre 3 en requiert 10, ... On observe en général que la complexité de calcul croît bien plus rapidement quand on augmente l'ordre que quand on augmente la finesse du maillage, à nombre de points égal ([Nedelec 1991], [Davies 1980]). Aussi apparaît-il préférable de choisir l'ordre 1 pour V_h et I_h , ce qui permet de respecter la contrainte de continuité de ces fonctions.

En ce qui concerne la conductivité, plusieurs arguments incitent au choix de l'ordre 0. La première est physique : σ^p est ici le rapport des pentes entre I^p et V^p – normalement, il est matriciel (2×2) mais dans le cas présent isotrope, il se ramène à un scalaire. Les pentes étant approchées à l'ordre 1, le plus simple est d'approcher leur rapport à l'ordre 0, c'est-à-dire constant par morceaux. Ceci s'avère d'un emploi plus simple pour les représentations graphiques, sans gêner la physique puisqu'une conductivité peut être discontinue. Enfin, des raisons de symétrie interviennent puisque σ^{-1} , qui intervient aussi dans l'équation (II.16) et qui joue un rôle similaire à σ , ne peut être approché par le même ordre que σ que si σ^p est pris constant sur l'élément Ω^p .

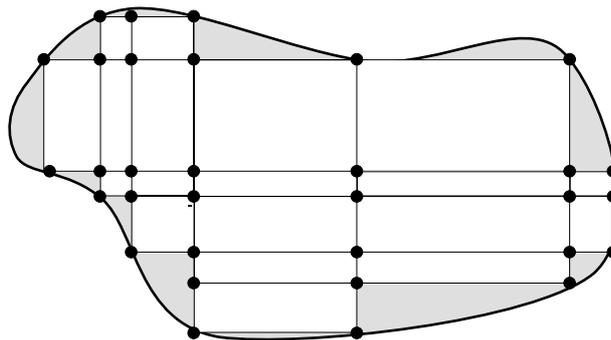


FIG. III.2 - *approximation d'une région par des éléments rectangulaires.*

Pour le choix du maillage, on pense d'abord à tirer parti du système habituel de coordonnées cartésiennes en utilisant des éléments rectangulaires. Un maillage rectangulaire sur un objet quelconque est représenté figure III.2. On constate qu'avec ce type de maillage, naturel en MDF, la frontière de notre maillage n'a pas du tout l'allure de la frontière réelle de l'objet, et qu'un découpage plus fin est préférable.

Si on est limité en nombre d'éléments, la solution du maillage triangulaire, schématisée figure III.3, sans être beaucoup plus délicate à mettre en œuvre, est nettement plus satisfaisante, d'autant plus qu'elle est naturelle avec le choix de fonctions d'ordre 1 pour I_h et V_h (puisque leur valeur aux 3 sommets distincts d'un élément vont suffir à définir l'approximation par un petit morceau de plan). Nous choisissons donc de discrétiser Ω avec un maillage triangulaire. Nous ne détaillons pas dans ce travail les aspects relevant de la construction de ces maillages à partir de la donnée du domaine Ω . Le lecteur souhai-

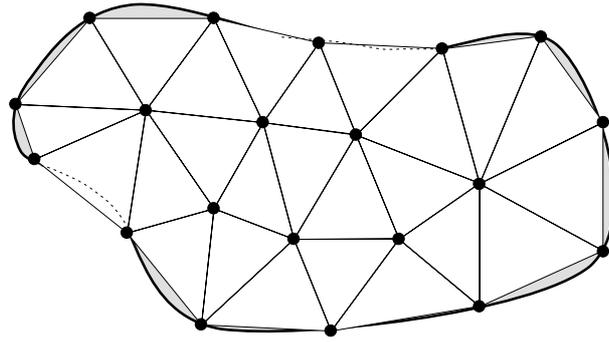


FIG. III.3 - approximation d'une région par des éléments triangulaires.

tant approfondir cette question, (et désireux de développer des algorithmes de maillages rapides et efficaces) pourra se référer à l'ouvrage de synthèse [George 1991].

Remarque III.2 (Décomposition des fonctions I_h , V_h et σ_h sur une base).

Pour la conductivité, on a l'écriture :

$$\sigma_h(x, y) = \sum_{p=1}^P \sigma^p(x, y).$$

Ayant choisi une approximation d'ordre 0, on peut la réécrire sous la forme

$$\sigma_h(x, y) = \sum_{p=1}^P \sigma_p \mathbb{1}^p(x, y)$$

où $\mathbb{1}^p(x, y)$ est la fonction caractéristique sur Ω_p . Les fonctions $\mathbb{1}^p$ constituent donc une base de l'ensemble des fonctions constantes par morceaux \mathcal{K}_h^0 de Ω_h . Les scalaires σ_p , valeurs de la conductivité sur les éléments Ω_p , sont donc les coefficients de la décomposition de σ_h sur \mathcal{K}_h^0 .

En revanche, pour I_h et V_h , les écritures

$$I_h(x, y) = \sum_{p=1}^P I^p(x, y)$$

et

$$V_h(x, y) = \sum_{p=1}^P V^p(x, y)$$

ne sont pas des décompositions sur l'ensemble des fonctions affines par morceaux \mathcal{K}_h^1 de Ω_h . Toutefois, la contrainte d'adjacence mentionnée précédemment permet de trouver facilement une base de \mathcal{K}_h^1 en les fonctions *pyramides* π_n , affines par morceaux, qui valent 1 au nœud n , 0 sur l'arête opposée au sommet n (pour chaque élément ayant n pour

sommet), et nulle en dehors de ces éléments. Alors, la décomposition devient :

$$I_h(x, y) = \sum_{n=1}^N i_n \pi_n(x, y)$$

$$\text{et } V_h(x, y) = \sum_{n=1}^N v_n \pi_n(x, y),$$

où N désigne le nombre de nœuds et les scalaires i_n et v_n sont les valeurs de I_h et V_h au nœud n .

Ainsi, pour les fonctions d'ordre 0, la structure élémentaire pertinente est l'*élément* tandis que pour les fonctions d'ordre 1, c'est le *nœud* qui constitue l'unité pertinente pour les sommations. La difficulté réside donc dans l'utilisation simultanée des deux types de fonctions lors de l'approximation de (II.16). Pour résoudre cette difficulté, c'est l'introduction d'un troisième outil, les coordonnées triangulaires, qui facilite le plus les développements.

4.3 Introduction de coordonnées triangulaires

Puisque nous choisissons de mailler Ω_h avec des triangles, donnons quelques propriétés des coordonnées triangulaires, particulièrement pratiques dans notre étude. Nous nous contentons ici de reproduire les propriétés qui nous intéressent. Pour de plus amples détails, on peut se référer à [Davies 1980].

Un point M du plan peut être repéré par rapport au p -ième élément triangulaire par ses trois coordonnées triangulaires l_1^p , l_2^p et l_3^p définies comme suit :

$$l_i^p := \frac{A_i^p}{A^p}, i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.2})$$

avec pour A^p l'aire algébrique de l'élément Ω^p (l'aire est positive si les points 1, 2 et 3 sont orientés dans le sens trigonométrique) :

$$A^p := \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^p & y_1^p \\ 1 & x_2^p & y_2^p \\ 1 & x_3^p & y_3^p \end{vmatrix}, \quad (\text{III.3})$$

les (x_i^p, y_i^p) étant les coordonnées des sommets, A_i^p désignant l'aire algébrique du triangle défini par le point courant M et les deux points opposés au point i . Ces coordonnées correspondent au cas particulier des coordonnées barycentriques développées dans le cas de triangles. Les l_i^p ne sont bien sûr pas indépendants puisque $l_1^p + l_2^p + l_3^p = 1$. On remarque alors qu'un point M appartient à l'élément p ssi ses trois coordonnées sont dans l'intervalle $[0, 1]$.

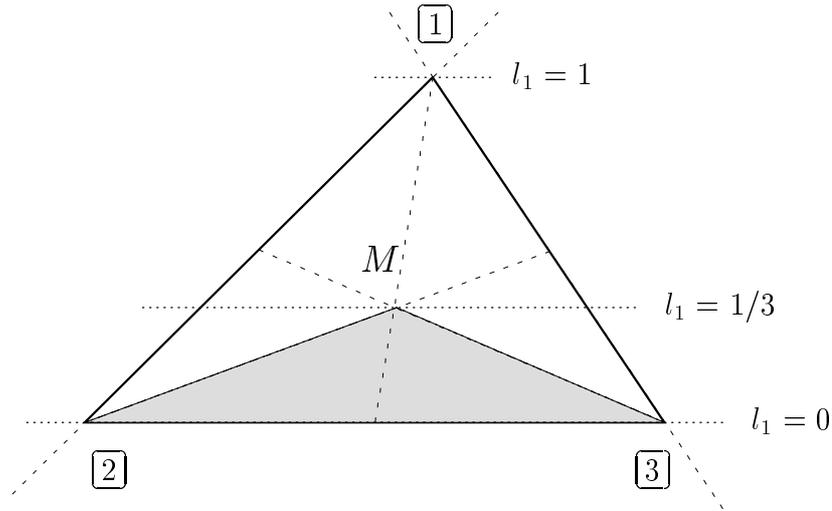


FIG. III.4 - Introduction de coordonnées barycentriques triangulaires. Tout point M du plan est caractérisé par ses 3 coordonnées triangulaires (l_1, l_2, l_3) , définies linéairement, relativement à un triangle donné, de sorte que $l_i = 1$ si M est le sommet i et $l_i = 0$ sur l'arête opposée au sommet i . On choisit naturellement d'utiliser pour le point M le système de coordonnées relatif au triangle à l'intérieur duquel il se situe.

Les autres propriétés qui nous intéressent sont celles qui les relient aux coordonnées cartésiennes. En notant $\mathbf{x}^p = [x_1^p \ x_2^p \ x_3^p]^t$ et $\mathbf{l}^p = [l_1^p \ l_2^p \ l_3^p]^t$, les relations entre (x, y) et (l_1^p, l_2^p, l_3^p) sont données par

$$x = \mathbf{x}^{p^t} \mathbf{l}^p, \quad (\text{III.4a})$$

$$y = \mathbf{y}^{p^t} \mathbf{l}^p \quad (\text{III.4b})$$

et réciproquement par

$$l_i^p = \frac{a_i^p + b_i^p x + c_i^p y}{2A^p} \quad (\text{III.5})$$

où

$$a_1^p := x_2^p y_3^p - x_3^p y_2^p, \quad (\text{III.6a})$$

$$b_1^p := y_2^p - y_3^p \quad (\text{III.6b})$$

$$\text{et } c_1^p := x_3^p - x_2^p, \quad (\text{III.6c})$$

a_2^p, b_2^p, c_2^p et a_3^p, b_3^p, c_3^p étant déduits de a_1^p, b_1^p, c_1^p par permutation circulaire. On en déduit aussi les dérivées de l_i^p par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial l_i^p}{\partial x} = \frac{b_i^p}{2A^p}, \quad (\text{III.7a})$$

$$\frac{\partial l_i^p}{\partial y} = \frac{c_i^p}{2A^p}. \quad (\text{III.7b})$$

4.4 Écriture de l'approximation

Dans [Kohn et McKenney 1990], on trouve une première utilisation explicite de la formulation discrétisée de l'intégrale Π donnée par (II.16), les auteurs ayant pour but, non seulement de résoudre le problème direct en minimisant Π par rapport à V , mais aussi le problème inverse en le minimisant par rapport à σ , $\overset{\circ}{I}$ et $\overset{\circ}{V}$. Dans ce paragraphe, nous réécrivons cette discrétisation MÉF en détaillant les aspects que nous avons mentionnés au début de ce paragraphe.

4.4.1 Écriture algébrique

Pour écrire l'approximation de la formulation variationnelle, plutôt que de partir de (II.16) comme dans [Kohn et McKenney 1990], nous préférons partir de (II.13). En effet, cela nous permet, d'une part, de mettre plus simplement en évidence la positivité et d'autre part, d'introduire une écriture matricielle compacte. Écrivons maintenant l'approximation Π de (II.13) à partir des décompositions précédentes :

$$\Pi(V_h, I_h, \sigma_h) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_h} \left| \sigma^{1/2} (\overrightarrow{\text{grad}} V_h) + \sigma^{-1/2} (\overrightarrow{\text{grad}} I_h)^\perp \right|^2 dx dy, \quad (\text{III.8})$$

qui, compte tenu du partitionnement des décompositions revient à :

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \iint_{\Omega_p} \left| (\sigma^p)^{1/2} (\overrightarrow{\text{grad}} V^p) + (\sigma^p)^{-1/2} (\overrightarrow{\text{grad}} I^p)^\perp \right|^2 dx dy. \quad (\text{III.9})$$

En posant

$$\delta\pi_x^p := (\sigma^p)^{1/2} \frac{\partial V^p}{\partial x} - (\sigma^p)^{-1/2} \frac{\partial I^p}{\partial y} \quad (\text{III.10a})$$

$$\delta\pi_y^p := (\sigma^p)^{1/2} \frac{\partial V^p}{\partial y} + (\sigma^p)^{-1/2} \frac{\partial I^p}{\partial x}, \quad (\text{III.10b})$$

il vient :

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \iint_{\Omega_p} [(\delta\pi_x^p)^2 + (\delta\pi_y^p)^2] dx dy. \quad (\text{III.11})$$

Comme nous avons choisi pour les $V^p(x, y)$ et $I^p(x, y)$ des polynômes du premier degré, nous pouvons écrire :

$$V^p(x, y) = \sum_{n \in \mathcal{S}(p)} l_n^p v_n \quad (\text{III.12})$$

$$I^p(x, y) = \sum_{n \in \mathcal{S}(p)} l_n^p i_n \quad (\text{III.13})$$

où $\mathcal{S}(p)$ désigne l'ensemble des indices des trois sommets de Ω_p dans la numérotation globale des nœuds tandis que v_n et i_n , n -ièmes composantes des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{i} , désignent respectivement la tension et le courant au nœud n ; l_n^p est la coordonnée triangulaire du point courant (x, y) , – coordonnée relative au même nœud n de l'élément Ω_p . Rappelons que, puisque $\sigma^p(x, y)$ est choisi constant sur Ω_p , on peut noter $\sigma^p = \sigma_p$, p -ième élément du vecteur $\boldsymbol{\sigma}$. En utilisant les formules de dérivations (III.7), on obtient alors :

$$\delta\pi_x^p = \sigma_p^{1/2} \sum_{n \in \mathcal{S}(p)} \frac{b_n^p v_n}{2A^p} - \sigma_p^{-1/2} \sum_{n \in \mathcal{S}(p)} \frac{c_n^p i_n}{2A^p} \quad (\text{III.14a})$$

$$\delta\pi_y^p = \sigma_p^{1/2} \sum_{n \in \mathcal{S}(p)} \frac{c_n^p v_n}{2A^p} + \sigma_p^{-1/2} \sum_{n \in \mathcal{S}(p)} \frac{b_n^p i_n}{2A^p}, \quad (\text{III.14b})$$

où les b_n^p et c_n^p sont les b_i^p et c_i^p , ($i = 1, 2, 3$) réindexés globalement de la même manière que les l_i^p . $\delta\pi_x^p$ et $\delta\pi_y^p$ sont des constantes. L'intégration de (III.11) sur chaque élément aboutit donc à :

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P [(\delta\pi_x^p)^2 + (\delta\pi_y^p)^2] |A^p|, \quad (\text{III.15})$$

puisque A^p est une aire algébrique. Nous introduisons alors les notations matricielles suivantes :

$$\mathbf{B} := (b_{pn})_{\substack{1 \leq p \leq P \\ 1 \leq n \leq N}} \quad (\text{III.16a})$$

$$\mathbf{C} := (c_{pn})_{\substack{1 \leq p \leq P \\ 1 \leq n \leq N}} \quad (\text{III.16b})$$

où, rappelons le, P est le nombre d'éléments, N est le nombre de nœuds et

$$b_{pn} := \begin{cases} \frac{b_n^p}{2\sqrt{|A^p|}} & \text{si } n \in \mathcal{S}(p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.17a})$$

$$\text{et } c_{pn} := \begin{cases} \frac{c_n^p}{2\sqrt{|A^p|}} & \text{si } n \in \mathcal{S}(p) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.17b})$$

Les lignes des matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} ne contiennent que trois éléments non nuls aux indices des sommets de Ω^p . \mathbf{B} et \mathbf{C} sont donc des matrices très *creuses*. En notant \mathbf{b}_p et \mathbf{c}_p les vecteurs contenant ces lignes, (III.15) devient :

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_p \{ \sigma_p [(\mathbf{b}_p^t \mathbf{v})^2 + (\mathbf{c}_p^t \mathbf{v})^2] + \sigma_p^{-1} [(\mathbf{b}_p^t \mathbf{i})^2 + (\mathbf{c}_p^t \mathbf{i})^2] \} \\ &+ \sum_p \{ (\mathbf{c}_p^t \mathbf{v})(\mathbf{b}_p^t \mathbf{i}) - (\mathbf{b}_p^t \mathbf{v})(\mathbf{c}_p^t \mathbf{i}) \}. \end{aligned}$$

En posant par ailleurs

$$\Delta_{\boldsymbol{\sigma}} := \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{III.18})$$

i.e., la matrice diagonale contenant les éléments du vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ sur la diagonale, on a :

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} & (\mathbf{v}^t \mathbf{B}^t \Delta_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{v}^t \mathbf{C}^t \Delta_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C} \mathbf{v} + \mathbf{i}^t \mathbf{B}^t \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{i} + \mathbf{i}^t \mathbf{C}^t \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{i}) \\ & - \mathbf{v}^t \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{i} + \mathbf{v}^t \mathbf{C}^t \mathbf{B} \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

qu'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} & [\mathbf{v}^t (\mathbf{B}^t \Delta_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{B} + \mathbf{C}^t \Delta_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}) \mathbf{v} + \mathbf{i}^t (\mathbf{B}^t \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^t \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{i}] \\ & + \mathbf{v}^t (\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C}) \mathbf{i} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

ou bien

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\|\Delta_{\boldsymbol{\sigma}}^{1/2} \mathbf{B} \mathbf{v} - \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{i}\|^2 + \|\Delta_{\boldsymbol{\sigma}}^{1/2} \mathbf{C} \mathbf{v} + \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{i}\|^2 \right], \quad (\text{III.21})$$

ce qui met en évidence le caractère défini-positif de la formulation variationnelle discrète.

4.4.2 Forme compacte de la discrétisation

Les formules (III.19), (III.20) et (III.21) ne sont pas directement utilisables pour la résolution du problème direct. Pour introduire les conditions aux limites, il est préférable de simplifier l'écriture de $\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C}$, grâce à la propriété suivante :

Propriété III.1 (Formule de Green discrète).

On a l'égalité suivante :

$$\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C} = -\bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{P}}, \quad (\text{III.22})$$

où $\bar{\mathbf{P}}$ est la matrice (de taille $\bar{N} \times N$) de projection de l'ensemble des nœuds sur les nœuds de la frontière et \mathbf{D} est une matrice ($\bar{N} \times \bar{N}$) de différence. Si $\bar{\mathcal{N}}$ désigne l'ensemble des indices de $\mathcal{N} := \{1..N\}$ désignant les nœuds de la frontière, on a :

$$(\bar{\mathbf{P}})_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \in \bar{\mathcal{N}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

D'autre part, si $\vec{\mathcal{N}} = \{1..\bar{N}\}$ désigne ce même ensemble d'indices $\bar{\mathcal{N}}$ réindexé de sorte que les nœuds frontaliers soient classés continûment en parcourant $\bar{\Omega}_h$ dans l'ordre trigonométrique, on a :

$$\mathbf{D}_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = i - 1 \text{ } [\bar{N}], \\ -\frac{1}{2} & \text{si } j = i + 1 \text{ } [\bar{N}], \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

En particulier, \mathbf{D} est une matrice circulante. Cette propriété s'interprète comme la formule de Green discrète car, pour le dernier terme de (III.20), on obtient:

$$\mathbf{v}^t(\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C})\mathbf{i} = -\bar{\mathbf{v}}^t \mathbf{D}\bar{\mathbf{i}}, \quad (\text{III.25})$$

ce qui ne fait plus intervenir que les tensions et les courants de la frontière.

Une démonstration de cette propriété est donnée en annexe à la fin de ce chapitre. Nous introduisons par ailleurs les notations suivantes :

$$\mathbf{\Lambda}_\sigma := \mathbf{B}^t \Delta_\sigma \mathbf{B} + \mathbf{C}^t \Delta_\sigma \mathbf{C} \text{ et} \quad (\text{III.26a})$$

$$\mathbf{\Gamma}_\sigma := \mathbf{B}^t \Delta_\sigma^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^t \Delta_\sigma^{-1} \mathbf{C}. \quad (\text{III.26b})$$

Alors, on a la propriété suivante :

Propriété III.2 (Noyau de $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ et $\mathbf{\Gamma}_\sigma$).

Les matrices $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ et $\mathbf{\Gamma}_\sigma$, de taille $N \times N$, sont symétriques, définies positives. De plus, on a

$$\mathcal{Ker}(\mathbf{\Lambda}_\sigma) = \mathcal{Ker}(\mathbf{\Gamma}_\sigma) = \{\mathbf{1}_N\} \quad (\text{III.27})$$

où $\mathbf{1}_N$ est le vecteur de longueur N ne contenant que des 1.

Le caractère défini positif des matrices $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ et $\mathbf{\Gamma}_\sigma$ découle directement de leur définition. La détermination du noyau est donnée en annexe. Comme, de plus, l'opérateur de différence antisymétrique \mathbf{D} filtre la moyenne à droite comme à gauche ($\mathcal{Ker}(\mathbf{D}) = \mathcal{Ker}(\mathbf{D}^t) = \{\mathbf{1}_N\}$), il apparaît que l'ensemble de la formulation discrète conserve la propriété d'éliminer la moyenne en \mathbf{v} et en \mathbf{i} .

Ajoutons que la matrice $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ est creuse elle aussi. En effet, $(\mathbf{\Lambda}_\sigma)_{ij}$ n'est non nul que s'il existe un élément commun p aux nœuds i et j . Autrement dit, à i fixé, le nombre de $(\mathbf{\Lambda}_\sigma)_{ij}$ non nuls vaut exactement le nombre de voisins du premier ordre du point i , en comptant ce dernier. Si la triangulation du domaine est régulière, ce nombre vaut en moyenne 7 pour les nœuds situés à l'intérieur du domaine (puisqu'un point est commun à 6 éléments), et 5 pour les nœuds situés à la frontière. La matrice $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ est donc d'autant plus creuse que le nombre de nœuds est élevé (*cf.* Fig. III.5). Cette propriété est importante car elle permet d'alléger considérablement la charge de calcul lors de la résolution. Nous y revenons dans le paragraphe consacré à la mise en œuvre.

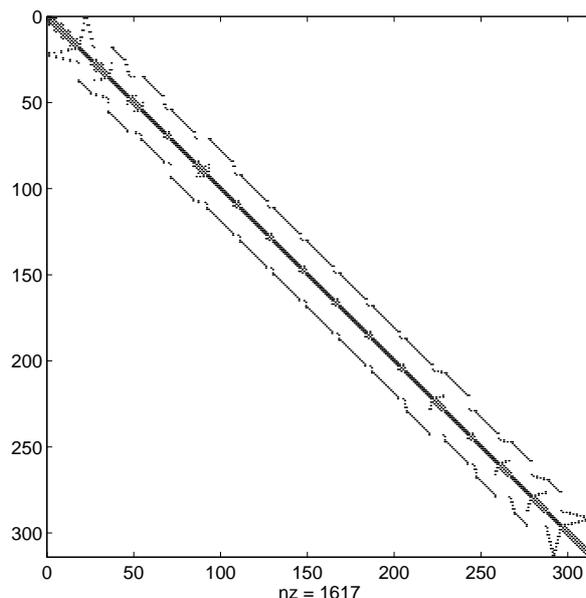


FIG. III.5 - Exemple de structure matricielle construite à partir d'un domaine de 300 nœuds. Les points noirs représentent les éléments non nuls de la matrice Λ_σ ($N \times N$), qui ne compte pas plus de $7N$ points non nuls. Λ_σ est donc creuse ici à 98 pourcents.

Récapitulatif III.1 (Formulation variationnelle discrète).

En résumé, la résolution discrète du problème direct se ramène à la minimisation de la formulation variationnelle discrète, laquelle prend la forme compacte strictement positive suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \Lambda_\sigma \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \Gamma_\sigma \mathbf{i} - \bar{\mathbf{v}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}, \quad (\text{III.28})$$

forme à laquelle sont associées les notations suivantes :

- \mathbf{v} , \mathbf{i} : vecteurs de taille N contenant respectivement les tensions et les courants aux N nœuds du domaine Ω_h ;
- $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{i}}$: vecteurs de taille \bar{N} contenant les restrictions de \mathbf{v} et \mathbf{i} aux \bar{N} nœuds de la frontière $\bar{\Omega}_h$ du domaine ;
- σ : vecteur de taille P contenant les valeurs de conductivité sur les P éléments du domaine. Signalons que, hormis pour des P très petits (quelques unités), on a $\bar{N} < N < P$;
- \mathbf{D} : matrice de différence de taille $\bar{N} \times \bar{N}$, antisymétrique et circulante ;
- Λ_σ et Γ_σ : matrices de taille $N \times N$, très creuses, symétriques définies positives, dépendant linéairement de σ pour Λ_σ et de σ^{-1} pour Γ_σ .

5 Résolutions MÉF du problème direct

Maintenant que nous disposons, avec (III.28), d'une formulation variationnelle discrète, nous construisons les deux approximations discrètes du problème direct ($\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \bar{\mathbf{v}}$ et $\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \bar{\mathbf{i}}$). Dans les deux cas, il s'agit d'un problème simple de résolution d'un système linéaire en introduisant une contrainte scalaire. Dans [Davies 1980] et [Webster 1990], on trouve une présentation succincte de ce calcul. Nous choisissons ici de le présenter de manière détaillée, en particulier parce que ce calcul nécessite de faire des choix : il faut d'une part imposer une condition aux limites essentielle pour lever l'indétermination du système, mais il est aussi possible de faire en sorte que la *matrice de rigidité* qui est inversée dans le système soit définie positive, ce qui simplifie par la suite la démonstration du théorème III.1.

Rappelons que nous cherchons à minimiser Π qui est une intégrale strictement positive. Remarquons d'abord que la propriété de découplage que nous avons mentionnée au chapitre précédent est conservée dans la formulation discrète. En effet, essayons de résoudre le cas $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbf{v}$ par différentiation, *i.e.*, de calculer le problème direct étendu $\mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\mathbf{i}})$. En annulant le gradient de Π par rapport à \mathbf{v} , on obtient :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0} = \boldsymbol{\Lambda}_\sigma \mathbf{v} - \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}, \quad (\text{III.29})$$

où les composantes intérieures $\overset{\circ}{i}$ de \mathbf{i} n'interviennent pas. On a donc bien le découplage en question. Le système d'équation $\boldsymbol{\Lambda}_\sigma \mathbf{v} = \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}$ est dégénéré puisque $\boldsymbol{\Lambda}_\sigma$ est de rang $N - 1$. Pour lever cette dégénérescence, il suffit de fixer à l'avance une des composantes de la tension \mathbf{v} (*e.g.*, à la frontière, auquel cas on dit qu'on impose une *condition aux limites essentielle*). Pour cela, si $n \in \mathcal{N}$ désigne l'indice du nœud auquel on fixe la tension, on définit :

$$\mathbf{w}_n^t := [0 \dots 0, \underset{n}{1}, 0 \dots 0] \text{ et} \quad (\text{III.30})$$

$$\mathbf{W}_n := \mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^t, \quad (\text{III.31})$$

matrice nulle partout sauf pour $(i, j) = (n, n)$. Alors, le problème revient à minimiser Π par rapport à \mathbf{v} sous la contrainte $\mathbf{w}_n^t \mathbf{v} = v_{ref}$ où v_{ref} est la tension de référence imposée au n -ième nœud. La résolution de ce système contraint avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange nous amène à introduire le coût secondaire ou *lagrangien* Π' et le multiplicateur de Lagrange j définis par :

$$\Pi'(\mathbf{v}, j) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \boldsymbol{\Lambda}_\sigma \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \boldsymbol{\Gamma}_\sigma \mathbf{i} - \bar{\mathbf{v}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} + j(\mathbf{w}_n^t \mathbf{v} - v_{ref}). \quad (\text{III.32})$$

Par construction, au point selle du critère Π' , la contrainte est vérifiée, ce qui implique que (III.28) est minimisé. Par ailleurs, la propriété III.2 nous garantit l'existence et l'unicité

de ce point selle. On a donc en particulier en ce point selle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi'}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0} &\Rightarrow \Lambda_\sigma \mathbf{v} - \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} + j \mathbf{w}_n = \mathbf{0}, \\ &\Rightarrow \mathbf{w}_n^t (\Lambda_\sigma \mathbf{v} - \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} + j \mathbf{w}_n) = 0, \\ &\Rightarrow j_v = \mathbf{w}_n^t (\bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} - \Lambda_\sigma \mathbf{v}). \end{aligned}$$

En réinjectant dans Π' cette nouvelle contrainte sur le lagrangien, il vient :

$$\Pi'(\mathbf{v}, j(\mathbf{v})) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \Lambda_\sigma \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \Gamma_\sigma \mathbf{i} - \bar{\mathbf{v}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} + (\mathbf{w}_n^t \mathbf{v} - v_{ref}) \mathbf{w}_n^t (\bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} - \Lambda_\sigma \mathbf{v}),$$

expression que, désormais, nous minimisons par rapport à \mathbf{v} . Remarquons d'abord que, pour toute matrice carrée \mathbf{M} de taille N et pour tout vecteur \mathbf{u} de longueur N , on a les propriétés :

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_n^t \mathbf{u}) \mathbf{M} \mathbf{w}_n &= u_n \mathbf{M}_{.n} = \mathbf{M} \mathbf{W}_n \mathbf{u} \text{ et} \\ (\mathbf{w}_n^t \mathbf{M} \mathbf{u}) \mathbf{w}_n &= u_n \mathbf{M}_{.n} = \mathbf{W}_n \mathbf{M} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi'(\mathbf{v}, j(\mathbf{v}))}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0} &= \Lambda_\sigma \mathbf{v} - \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} - (\mathbf{w}_n^t \mathbf{v} - v_{ref}) \Lambda_\sigma \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_n^t (\bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} - \Lambda_\sigma \mathbf{v}) \mathbf{w}_n \\ &= \Lambda_\sigma \mathbf{v} - \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} - \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n \mathbf{v} - \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma \mathbf{v} + v_{ref} \Lambda_\sigma \mathbf{w}_n + \mathbf{W}_n \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}, \end{aligned}$$

soit

$$(\Lambda_\sigma - \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n - \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma) \mathbf{v} - (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} + v_{ref} \Lambda_\sigma \mathbf{w}_n = \mathbf{0}, \quad (\text{III.33})$$

où \mathbf{I}_N est la matrice identité de taille $N \times N$. La matrice $(\Lambda_\sigma - \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n - \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma)$ est construite à partir de Λ_σ en lui soustrayant sa n -ième ligne et sa n -ième colonne. Elle est donc nulle sur cette ligne et sur cette colonne, sauf en (n, n) . Aussi est-elle inversible par blocs — un bloc de taille 1×1 , un de taille $(N - 1) \times (N - 1)$. Toutefois, elle n'est plus définie-positive. Si on désire préserver cette propriété, il suffit de remarquer que

$$\mathbf{W}_n \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n \mathbf{v} - v_{ref} \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma \mathbf{w}_n = \mathbf{0} \quad (\text{III.34})$$

lorsque $\mathbf{v}_n = v_{ref}$, *i.e.*, lorsque la contrainte est vérifiée. On ne change donc pas la solution lorsqu'on ajoute $2 \times (\text{III.34})$ à (III.33) , ce qui donne :

$$\begin{aligned} (\Lambda_\sigma - \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n - \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma + 2 \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n) \mathbf{v} = \\ (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) \bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} + v_{ref} (2 \mathbf{W}_n - \mathbf{I}_N) \Lambda_\sigma \mathbf{w}_n. \end{aligned}$$

Posons

$$\bar{\mathbf{P}}_n := (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) \bar{\mathbf{P}} \text{ et} \quad (\text{III.35a})$$

$$\mathbf{A}_\sigma := \Lambda_\sigma - \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n - \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma + 2 \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n. \quad (\text{III.35b})$$

La matrice $\bar{\mathbf{P}}_n$ est donc un opérateur projetant sur la frontière sauf sur le n-ième nœud, où la valeur projetée est toujours nulle. Quant à la matrice \mathbf{A}_σ , appelée *matrice de rigidité*, elle possède les mêmes propriétés que $\mathbf{\Lambda}_\sigma - \mathbf{\Lambda}_\sigma \mathbf{W}_n - \mathbf{W}_n \mathbf{\Lambda}_\sigma$, avec en plus la définie positivité puisqu'on peut la réécrire sous la forme

$$\boxed{\mathbf{A}_\sigma = (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) \mathbf{\Lambda}_\sigma (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) + \mathbf{W}_n \mathbf{\Lambda}_\sigma \mathbf{W}_n .} \quad (\text{III.36})$$

Par conséquent, déterminer la solution du problème direct étendu $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbf{v}$ revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} = \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} + v_{ref} (2\mathbf{W}_n - \mathbf{I}_N) \mathbf{\Lambda}_\sigma \mathbf{w}_n . \quad (\text{III.37})$$

Si, de plus, on choisit de prendre $v_{ref} = 0$ (ce que nous faisons par la suite), on parvient au modèle discret suivant pour le problème direct restreint $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \bar{\mathbf{v}}$:

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} ,$$

ce qui, compte tenu de « l'écriture bloc » de \mathbf{A}_σ , revient à :

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} .$$

En opérant le même raisonnement dans le cas $\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \bar{\mathbf{i}}$, en remarquant que $\mathbf{D}^t = -\mathbf{D}$ et en posant

$$\mathbf{G}_\sigma := \mathbf{\Gamma}_\sigma - \mathbf{\Gamma}_\sigma \mathbf{W}_n - \mathbf{W}_n \mathbf{\Gamma}_\sigma + 2\mathbf{W}_n \mathbf{\Gamma}_\sigma \mathbf{W}_n , \quad (\text{III.38})$$

ce qui se réécrit :

$$\boxed{\mathbf{G}_\sigma = (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) \mathbf{\Gamma}_\sigma (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) + \mathbf{W}_n \mathbf{\Gamma}_\sigma \mathbf{W}_n .} \quad (\text{III.39})$$

on aboutit à :

$$\bar{\mathbf{i}} = -\bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{G}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{v}} .$$

Puisque la matrice \mathbf{A}_σ (resp. \mathbf{G}_σ) est linéaire en σ (resp. en σ^{-1}), il en résulte que les modèles $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \bar{\mathbf{v}}$ et $\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \bar{\mathbf{i}}$ dépendent non-linéairement de σ (et de σ^{-1}) en sortie.

Récapitulatif III.2 (Résolutions du problème direct).

En résumé, les deux résolutions adjointes du problème direct (restreintes à la frontière) s'écrivent :

- Pour la résolution $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \bar{\mathbf{v}}$,

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}, \quad (\text{III.40})$$

- et pour la résolution $\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \bar{\mathbf{i}}$,

$$\bar{\mathbf{i}} = -\bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{G}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{v}}, \quad (\text{III.41})$$

avec les notations suivantes :

- $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{i}}$: vecteurs de taille \bar{N} contenant les restrictions de \mathbf{v} et \mathbf{i} aux \bar{N} nœuds de la frontière $\bar{\Omega}_h$ du domaine ;
- \mathbf{D} : matrice de différence de taille $\bar{N} \times \bar{N}$, antisymétrique et circulante ;
- $\bar{\mathbf{P}}_n$: matrice de taille $(\bar{N} \times N)$ dont la fonction est de ne retenir que les nœuds de la frontière, sauf sur le n -ième où elle projette 0, puisque la n -ième composante de \mathbf{v} est imposée à zéro en tant condition aux limites essentielle ;
- $\mathbf{A}_\sigma, \mathbf{G}_\sigma$: matrices de rigidité du système. Ces matrices de taille $(N \times N)$ sont des « matrices blocs » – un bloc de taille $N-1$ et un bloc de taille 1 en (n, n) . Elles sont construites à partir de $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ et $\mathbf{\Gamma}_\sigma$ à partir des équations (III.36) et (III.39). Elles sont définies positives et dépendent linéairement de σ pour \mathbf{A}_σ et σ^{-1} pour \mathbf{G}_σ . Il en résulte que les modèles $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \bar{\mathbf{v}}$ et $\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \bar{\mathbf{i}}$ dépendent non-linéairement de σ (et de σ^{-1}) en sortie.

6 Stabilité numérique, convergence et précision des modèles directs

Désormais, nous disposons, avec les équations (III.40) et (III.41), de modèles directs approchés. Nous déterminons maintenant dans quelle mesure nous pouvons les utiliser. Plus précisément, dans ce paragraphe, nous établissons d'abord que les deux modèles adjoints approchés sont numériquement stables, de sorte que l'*erreur de résolution* se ramène la plupart du temps à l'*erreur de discrétisation* (cf. chapitre I § 2). Nous présentons ensuite le théorème de convergence théorique de la MÉF. Ce résultat est toutefois très général, puisqu'il ne permet pas de quantifier numériquement l'erreur de discrétisation. Il existe dans la littérature numérique des méthodes d'estimation *a priori* et *a posteriori* de cette erreur [Babuska et Rheinboldt 1978], [Babuska et Rheinboldt 1979]. Toutefois, l'utilisation et le développement de ces méthodes se situent hors du champ de l'étude présente. Nous proposons ici une démarche intermédiaire de validation de la méthode. Nous appuyant sur des exemples numériques ainsi que le second résultat analytique présenté dans l'annexe chapitre II – Ω circulaire, conductivité « en chapeau » –, nous étudions l'évolution de l'erreur de discrétisation selon trois axes :

- la « finesse » du maillage ;
- la « forme » de la distribution de conductivité ;
- la « forme » de la distribution de courant d'entrée.

Cette présentation est essentiellement qualitative mais, en offrant à l'utilisateur des ordres de grandeur sur les erreurs, elle permet de valider l'emploi de la MÉF en TIÉ. Étant donné que les deux modèles approchés sont comparables dans leurs propriétés, nous choisissons, sauf mention explicite, d'étudier les propriétés du modèle $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbf{v}$.

6.1 Étude de la stabilité numérique (erreurs d'arrondi)

Pour établir la stabilité numérique du problème direct, nous considérons deux causes possibles d'incertitude sur la sortie $\bar{\mathbf{v}}$: des incertitudes en conductivité $\delta\sigma$ et des incertitudes en courant $\delta\bar{\mathbf{i}}$, ce qui s'écrit :

$$\bar{\mathbf{v}} + \delta\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D}(\bar{\mathbf{i}} + \delta\bar{\mathbf{i}}). \quad (\text{III.42})$$

Pour cela, nous posons d'abord

$$[\Delta_\sigma]_4 := \begin{bmatrix} \Delta_\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_\sigma \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) \\ \mathbf{C}(\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) \\ \mathbf{B}\mathbf{W}_n \\ \mathbf{C}\mathbf{W}_n \end{bmatrix}.$$

Alors, d'après les équations (III.26a) et (III.35b), on a directement

$$\mathbf{A}_\sigma = \mathbf{Q}^t [\Delta_\sigma]_4 \mathbf{Q}. \quad (\text{III.43})$$

Enfin, posons

$$\Theta := \mathbf{Q}^t \mathbf{Q}, \quad (\text{III.44})$$

qui correspond au cas particulier de \mathbf{A}_σ où $\sigma = \mathbf{1}_P$, *i.e.*, où la conductivité est uniforme et vaut 1. Alors, nous établissons la propriété suivante.

Théorème III.1 (Majoration de l'erreur d'arrondi en sortie).

Nous prenons les notations suivantes :

$$|\delta\sigma|_{\max} = \|\delta\sigma\|_\infty = \max_p |\delta\sigma_p|, \quad (\text{III.45})$$

$$\sigma_{\min} = \min_p \sigma_p, \quad (\text{III.46})$$

$$\lambda_\Theta^{\max} = \|\Theta\|_2, \quad (\text{III.47})$$

$$\lambda_\Theta^{\min} = \|\Theta^{-1}\|_2^{-1}. \quad (\text{III.48})$$

λ_Θ^{\max} et λ_Θ^{\min} sont donc respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de Θ . Alors, si $|\delta\sigma|_{\max} < \sigma_{\min} \lambda_\Theta^{\min} / \lambda_\Theta^{\max}$, la norme de l'erreur d'arrondi en sortie, définie dans l'équation (III.42), est majorée par la relation

$$\|\delta\bar{\mathbf{v}}\|_2 \leq \frac{\lambda_\Theta^{\max} |\delta\sigma|_{\max}}{\sigma_{\min} \lambda_\Theta^{\min} (\sigma_{\min} \lambda_\Theta^{\min} - |\delta\sigma|_{\max} \lambda_\Theta^{\max})} \|\bar{\mathbf{z}}\|_2 + \frac{\|\delta\bar{\mathbf{z}}\|_2}{\sigma_{\min} \lambda_\Theta^{\min}} \quad (\text{III.49})$$

Nous démontrons ce théorème dans l'annexe 8.3. Le résultat important que nous pouvons déduire est le suivant : si les opérations sont effectuées avec un calculateur double précision, la fiabilité du calcul du problème direct est de l'ordre de celle d'un calcul opéré en simple précision. En effet, si les grandeurs utilisées σ et $\bar{\mathbf{z}}$ sont normalisées autour de 1, les erreurs d'arrondi d'entrée, $|\delta\sigma|_{\max}$ et $\|\delta\bar{\mathbf{z}}\|_2$, susceptibles d'intervenir lors du calcul du problème direct se situent autour de 10^{-16} pour un calculateur double précision. En particulier, si le conditionnement $\lambda_\Theta^{\max} / \lambda_\Theta^{\min}$ (voire de préférence le rapport $\lambda_\Theta^{\max} / \lambda_\Theta^{\min 2}$) reste petit *i.e.*, 6 décades maximum, on a $|\delta\sigma|_{\max} \lambda_\Theta^{\max} \ll \sigma_{\min} \lambda_\Theta^{\min}$ si bien que l'on a :

$$\|\delta\bar{\mathbf{v}}\|_2 \lesssim \frac{\lambda_\Theta^{\max} |\delta\sigma|_{\max}}{\sigma_{\min}^2 \lambda_\Theta^{\min 2}} \|\bar{\mathbf{z}}\|_2 + \frac{\|\delta\bar{\mathbf{z}}\|_2}{\sigma_{\min} \lambda_\Theta^{\min}}.$$

Si, à titre indicatif, on prend $\sigma_{\min} = 10^{-1}$ et $\lambda_{\Theta}^{\min} = 10^{-3}$ (ce qui est justifié dans l'utilisation qu'on fait par la suite), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\delta\bar{\mathbf{v}}\|_2 &\lesssim \frac{10^6 |\delta\sigma|_{\max}}{10^{-2}} + \frac{\|\delta\bar{\mathbf{z}}\|_2}{10^{-1}10^{-3}} \\ &\lesssim 10^8 |\delta\sigma|_{\max} + 10^4 \|\delta\bar{\mathbf{z}}\|_2 \\ &\lesssim 10^{-8}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'amplitude relative de l'erreur en sortie reste inférieure à 10^{-8} , ce qui confère à la résolution MÉF du problème direct une marge de sûreté de l'ordre de la fiabilité d'un calcul en simple précision. L'amplification maximale de ces erreurs, donnée par la formule (III.49), dépend donc essentiellement de σ_{\min}^2 et des valeurs propres de Θ , qui constitue, en quelque sorte, la *matrice de référence* du problème direct associée à la discrétisation que nous avons choisie.

En règle générale, le conditionnement des matrices de rigidité dans les méthodes par éléments finis dépend fortement de la qualité du maillage. En particulier, dans le cas de maillages triangulaires 2D, il apparaît que, plus les éléments sont éloignés de l'équilatéralité, plus le conditionnement de la matrice Θ se dégrade [Zgainski et coll. 1997]. Comme il suffit d'un élément *distordu* pour rendre le maillage impropre au calcul, il faut veiller au maillage dans sa globalité. Si on développe un générateur automatique de maillage (*cf.* [George 1991]), on peut, par exemple, contraindre le mailleur à n'accepter que des éléments dont les angles aux sommets sont compris entre 45 et 90 degrés.

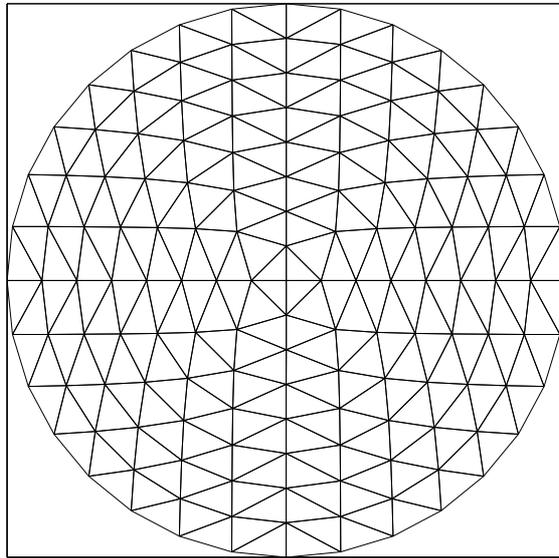


FIG. III.6 - Utilisation de maillages circulaires par couches concentriques (MCCC). Ici, le maillage comprend 8 couches concentriques ce qui donne 145 nœuds et 256 éléments.

Afin de donner une idée de l'ordre de grandeur de $\lambda_{\Theta}^{\max}/\lambda_{\Theta}^{\min 2}$ pour un maillage quelconque, nous proposons ici d'étudier le comportement de λ_{Θ}^{\max} et λ_{Θ}^{\min} en fonction du

nombre de mailles. Pour cela, nous calculons ces grandeurs sur une famille de maillages ne contenant pas d'éléments distordus. Par souci de simplicité, nous choisissons une famille de *maillages circulaires en couches concentriques* (MCCC). Cette famille utilise les propriétés géométriques du cercle pour proposer itérativement des maillages de taille croissante suivant le nombre de couches (*cf.* Fig. III.6).

Si c est le numéro de la couche courante comptée à partir du centre, la couche suivante $c + 1$ s'enroule circulairement autour de la couche c en ajoutant $8c + 4$ éléments – soit $4c$ nœuds – autour du maillage courant. Si N_c , N et P sont respectivement, le nombre total de couches, le nombre total de nœuds et le nombre total d'éléments, on obtient les relations :

$$N = 1 + 2N_c(N_c + 1) \quad (\text{III.50})$$

$$\text{et } P = 4N_c^2. \quad (\text{III.51})$$

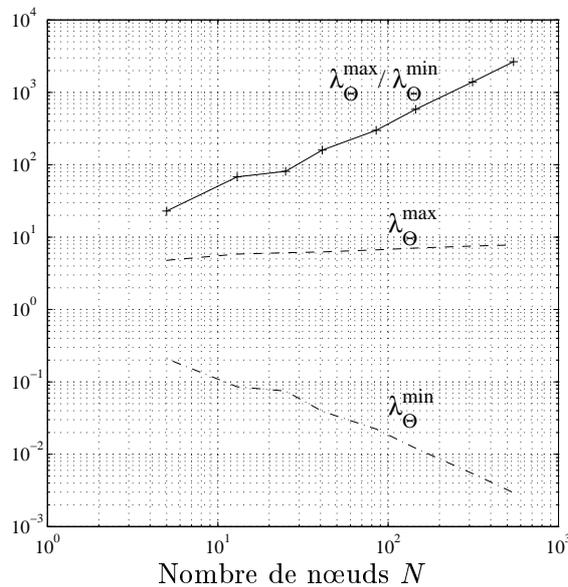


FIG. III.7 - Évolution du conditionnement de Θ en fonction du nombre de nœuds dans le maillage MCCC du domaine Ω . En tiretés (---), λ_{Θ}^{\max} ; en trait mixte (-·-), λ_{Θ}^{\min} ; en trait plein (-), le conditionnement $\lambda_{\Theta}^{\max}/\lambda_{\Theta}^{\min}$. On constate une croissance lente (et quasi-linéaire) du conditionnement en fonction de N .

Les résultats du calcul de λ_{Θ}^{\min} et λ_{Θ}^{\max} en fonction du nombre de nœuds N sont reportés sur la figure III.7. On observe d'abord une évolution quasi-linéaire des valeurs propres extrêmes en fonction de N : λ_{Θ}^{\max} reste presque constant tandis que λ_{Θ}^{\min} est divisé par 10 lorsque le N est multiplié par 10. Si l'on considère que, lors des reconstructions, le nombre moyen de nœuds des domaines vaut 300, on obtient (*cf.* Fig. III.7) $\lambda_{\Theta}^{\max}/\lambda_{\Theta}^{\min 2} \approx 5/(10^{-2})^2$ et si l'on prend un σ_{\min} de 10^{-2} , on obtient à l'aide de l'équation (III.49) une majoration de l'erreur d'arrondi en sortie de l'ordre de $5 \cdot 10^{-8}$. Par conséquent, cette erreur est de très loin inférieure à l'erreur de discrétisation du modèle par la MÉF, ainsi que l'attestent

les résultats qui suivent. Nous pouvons donc désormais confondre l'erreur de résolution et l'erreur de discrétisation.

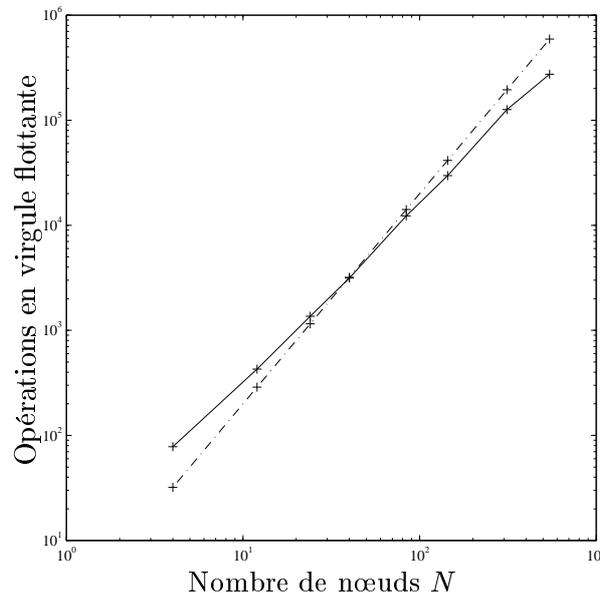


FIG. III.8 - En trait plein (—), évolution du coût de calcul de la résolution du système en fonction du nombre de nœuds, avec les MCCC; en trait mixte (-·-), pour comparaison, coût d'une multiplication de matrice pleine ($N \times N$) par un vecteur. Pour le nombre de nœuds qui nous intéresse ($N > 100$), le calcul de la résolution, s'avère donc particulièrement peu coûteux.

Remarque III.3 (Mise en œuvre algorithmique et coût de calcul).

Pour mettre en œuvre le problème direct, nous utilisons le logiciel *Matlab*[®]. La structure creuse de \mathbf{A}_σ , prise en compte lors son stockage, permet d'accélérer grandement la résolution du système linéaire. Le coût de ce calcul est remarquablement peu élevé puisqu'il se situe en dessous du coût de calcul équivalent de l'approximation linéaire : produit d'une matrice pleine ($N \times N$) par un vecteur (cf. Fig. III.8). Le coût de résolution d'un système linéaire plein est de l'ordre de $O(N^3)$ opérations en virgule flottante. Comme ici, le nombre de points non nuls à l'intérieur de la matrice est inférieur à $7N$, on peut, grâce à des algorithmes itératifs de type Gauss-Seidel, aboutir à un coût algorithmique (cf. Fig. III.8) de l'ordre de $O(N^2)$ opérations en virgule flottante.

6.2 Propriété de convergence et étude de l'erreur de résolution

Nous avons déjà mentionné qu'à l'inverse des approximations linéaires, l'approximation MÉF pour la TIÉ converge théoriquement vers la solution exacte de la formulation variationnelle. La vitesse de convergence est en fait caractérisée par le résultat suivant, mentionné dans [Davies 1980]:

Théorème III.2 (Taux de convergence).

Une distribution de courant \bar{I} , linéaire par morceaux sur $\bar{\Omega}_N^P$, étant imposée à la frontière, nous notons $E = V^* - \hat{V}$ la différence entre respectivement la distribution exacte et la solution MÉF approchée. Si h est le diamètre de la plus grande maille du domaine, il existe un réel $C > 0$, fonction des seules caractéristiques géométriques du domaine $\bar{\Omega}_N^P$, tel que :

$$\|E\|_2 \leq Ch^2. \quad (\text{III.52})$$

où la norme notée $\|U\|_2$ de la distribution U est la norme associée à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega_h) = W_2^1(\Omega_h)$ définie par :

$$\|U\|_2 = [\langle U, U \rangle + \langle \overrightarrow{\text{grad}} U, \overrightarrow{\text{grad}} U \rangle]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.53})$$

où le produit scalaire $\langle U, V \rangle$ est donné par :

$$\langle U, V \rangle = \int_{\Omega} UV \, dx \, dy. \quad (\text{III.54})$$

Ce résultat de convergence, en $O(h^2)$, souligne une convergence théorique rapide de la méthode lorsque la taille des mailles diminue, quelle que soit la distribution de courant d'entrée et celle de conductivité. Toutefois, il faut souligner que, comme la constante C dépend de $\bar{\Omega}_N^P$, ce résultat ne signifie pas une décroissance monotone en fonction de h . En fait, cette propriété de monotonie est avérée dans le cas où la suite des $\bar{\Omega}_N^P$ est constituée de mailles successivement emboîtées les unes dans les autres. En outre, ce résultat n'est pas tellement utile en pratique. En effet, la détermination de C s'avère délicate d'une part et assez peu représentative de la précision réelle de la méthode puisque, étant globale sur toutes les configurations σ et $\bar{\mathbf{i}}$, elle constitue une très forte majoration.

Une première manière très simple d'estimer la précision est d'utiliser un exemple dans lequel on sait calculer la solution analytique pour comparer cette dernière avec le résultat numérique. Nous reprenons ici l'exemple du chapitre II § 6.2 : un domaine circulaire uniforme de rayon 1 comprenant une discontinuité centrée, dont nous fixons le rayon à $R = \frac{1}{2}$. Nous imposons, comme entrée en courant, la distribution sinusoïdale monopériodique définie par

$$j(\theta) = \frac{d\bar{I}}{dt} = C \cos \theta + S \sin \theta,$$

de sorte que la sortie théorique devient

$$\bar{V}^*(\theta; \sigma_1, j) = \frac{1 - \mu R^2}{1 + \mu R^2} (C \cos \theta + S \sin \theta),$$

avec

$$\mu = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}.$$

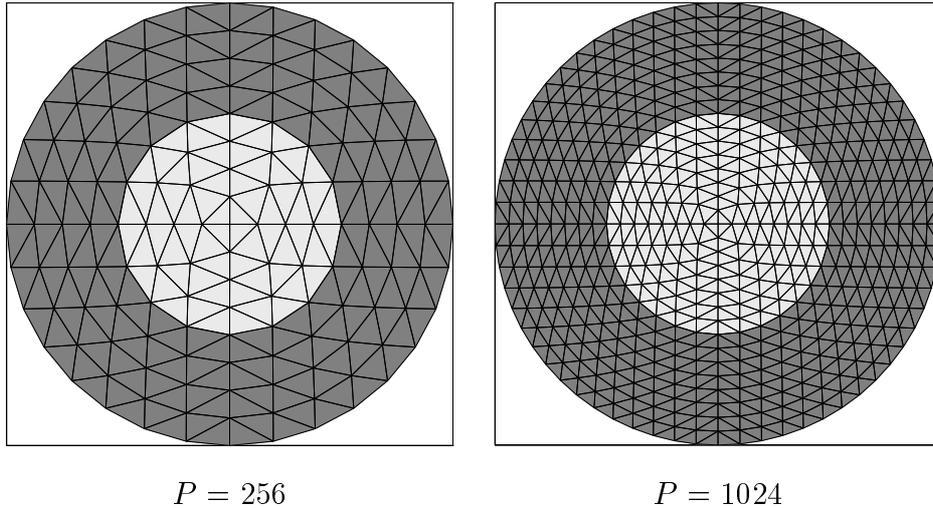


FIG. III.9 - Dans l'exemple du chap. II § 6.2, il existe une solution analytique du problème direct. Pour l'étude de la précision de la discrétisation, nous comparons ces valeurs avec les résultats MÉF obtenus avec des maillages à différentes résolutions – caractérisées par le nombre d'éléments P – dans le cas $R = 1/2$.

En utilisant de nouveau les MCCC, nous étudions l'écart entre \hat{V} et \bar{V}^* , d'une part en fonction de σ , d'autre part en fonction de N . Plus précisément, nous mesurons la distance définie par :

$$\nu(\sigma) := \frac{[\sum_{n=1}^N (\bar{V}_n^* - \hat{V}_n)^2]^{\frac{1}{2}}}{[\sum_{n=1}^N (\bar{V}_n^*)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous présentons les résultats (cf. Fig. III.10) obtenus pour $P = 64$, $P = 256$ et $P = 1024$, qui correspondent, entre 64 et 256 puis entre 256 et 1024 (cf. Fig. III.9), à un raffinement de chaque maille en 4 sous-maillages.

On vérifie d'abord que l'erreur de discrétisation diminue (d'environ une demi-décade par étape de raffinement). Nous constatons que l'influence de σ (ou plus précisément de $\log \sigma$) est dissymétrique : les log-conductivités négatives entraînent une erreur d'approximation environ 7 fois plus élevée que les log-conductivités positives. Par conséquent, sachant que le modèle direct $\bar{v} \rightarrow \mathbf{i}$ génèrera un tableau exactement symétrique par rapport à l'asymptote verticale d'équation $\sigma = 1$, on optera pour ce dernier si on sait à l'avance que la conductivité de fond est plus élevée que les inhomogénéités. La grande similitude de l'allure des trois courbes confirme la régularité de la vitesse de convergence annoncée dans le théorème III.2.

Par ailleurs, un examen attentif de la figure III.10 révèle que nous n'y avons pas reporté la valeur de ν pour $\sigma = 1$. En effet, celle-ci se situe autour de 10^{-15} quelle que soit la résolution. Ceci s'explique, d'une part parce que la conductivité est uniforme et d'autre part parce que le courant injecté est sinusoïdal monopériodique. Alors, et dans cette situation seulement, les lignes de courant sont parfaitement rectilignes. Dans ce cas,

la MÉF dont le principe est d'approcher linéairement les lignes de courant sur chaque élément, devient une discrétisation exacte et seules les erreurs d'arrondi interviennent. L'utilisation d'une approche MÉF, même avec un petit nombre d'éléments, s'avère donc particulièrement précise pour les distributions de conductivité très peu contrastées.

Pour autant, l'augmentation du contraste (*i.e.*, de σ) n'entraîne pas une croissance illimitée de l'imprécision du modèle puisque, pour $\sigma < 0,1$ et $\sigma > 3$, l'erreur de discrétisation atteint un palier. Dans des cas de résolution moyenne (typiquement $P = 256$), pour des distributions où $\sigma > 1$, on obtient une précision $\nu \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$ ce qui donne un *rapport signal à bruit de discrétisation* (RSBD) qui vaut $20 \log(\nu^{-1}) \approx 55$ dB, contre 65 dB pour un pas de résolution supérieur (ν est en effet défini comme un rapport bruit sur signal).

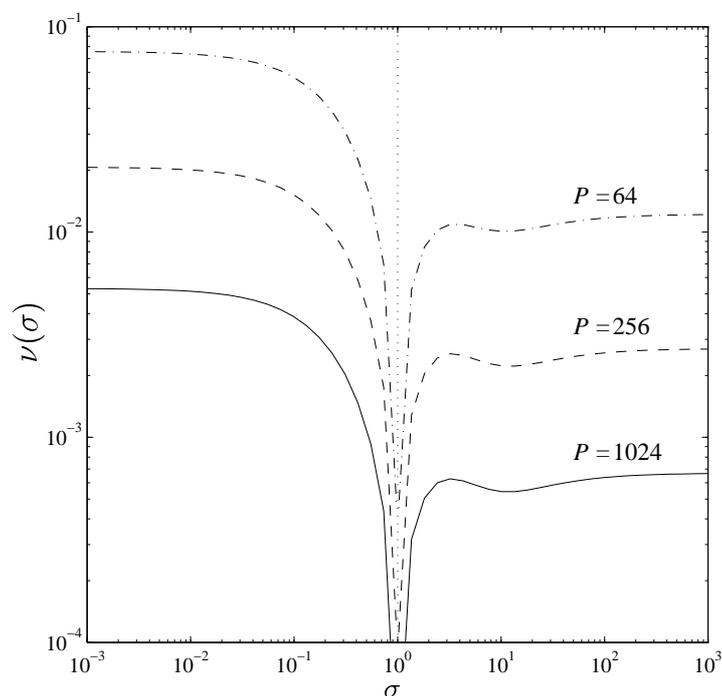


FIG. III.10 - *Décroissance de l'erreur de discrétisation $\nu(\sigma)$ avec l'accroissement de la résolution, dans le cas de l'exemple du chap. II § 6.2 - P étant le nombre d'éléments du maillage. On notera le comportement asymétrique de cette erreur par rapport à l'asymptote verticale d'équation $\sigma = 1$.*

Ces résultats sont valables pour des distributions de courant d'entrée $\bar{\mathbf{i}}$ sinusoïdales monopériodiques. Qu'advient-il pour des distributions différentes ? Il est plus délicat d'évaluer directement l'erreur de précision. Nous proposons néanmoins de comparer les vitesses de convergence à l'aide du *résidu* de la méthode variationnelle : puisqu'on dispose de deux modèles adjoints, on peut enchaîner les calculs $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbf{v}$ et $\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{i}'$. Ensuite, soit on compare $\bar{\mathbf{i}}$ et $\bar{\mathbf{i}}'$, soit, ce qui semble plus simple, on calcule le *résidu* défini de la manière suivante :

Définition III.1 (Résidu).

Nous appelons *résidu* le scalaire strictement positif ρ , contenant la valeur résiduelle de Π construite à partir de deux résolutions jointes enchaînées $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbf{v}$ et $\bar{\mathbf{v}} (= \bar{\mathbf{P}}\mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{i}'$, défini par

$$\rho(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\mathbf{v}}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}} \\ \mathbf{i}' \end{bmatrix}) := \Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}} \\ \mathbf{i}' \end{bmatrix}) \quad (\text{III.55})$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \boldsymbol{\Lambda}_\sigma \mathbf{v} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}} \\ \mathbf{i}' \end{bmatrix}^t \boldsymbol{\Gamma}_\sigma \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}} \\ \mathbf{i}' \end{bmatrix} - \bar{\mathbf{v}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}. \quad (\text{III.56})$$

où $\mathbf{i}' = \mathring{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{i}}$ est le vecteur des courants situés strictement à l'intérieur du domaine Ω_h , vecteur qui ne peut être calculé qu'à partir de la seconde résolution $\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{i}'$.

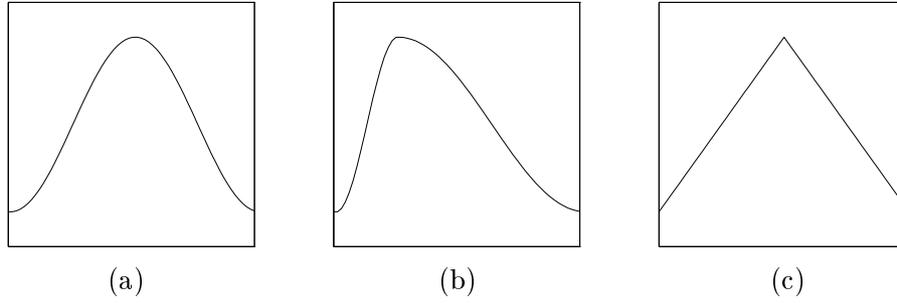


FIG. III.11 - Allure des trois distributions d'entrées ($\bar{\mathbf{i}}$) utilisées pour le calcul des résidus : à gauche (a), distribution sinusoïdale ; au centre (b), 2 morceaux de sinusoïde ; à droite (c), distribution triangulaire.

Les propriétés de cet estimateur de la précision sont, à notre connaissance, mal connues. Néanmoins, plus le maillage s'affine, meilleure est l'approximation MÉF et donc plus proche de 0 sera le résidu. Plutôt qu'une estimation de l'erreur de discrétisation, le résidu fournit un estimateur comparatif de la vitesse de convergence en fonction de la finesse du maillage et de la distribution de courant d'entrée.

Nous proposons de comparer les évolutions du résidu pour trois distributions de courant différentes, de puissance normalisée (*cf.* Fig. III.11). Dans le cas de l'entrée sinusoïdale monopériodique, sur le même domaine circulaire de conductivité uniforme, le résidu ρ , comme $\nu(\sigma)$, est de l'ordre de 10^{-15} , quel que soit P . Par ailleurs, nous présentons le comportement de ce dernier dans les quatre situations suivantes (*cf.* Fig. III.12) :

- cas 1, + : conductivité uniforme, entrée de type (b) ;
- cas 1, * : conductivité *en chapeau* ($R = 1/2$, $\sigma = 10$), entrée de type (a). Cela correspond à la verticale de la figure III.10 pour $\sigma = 10$;
- cas 1, o : conductivité *en chapeau*, entrée de type (b).
- cas 2, x : conductivité uniforme, entrée de type (c) ;

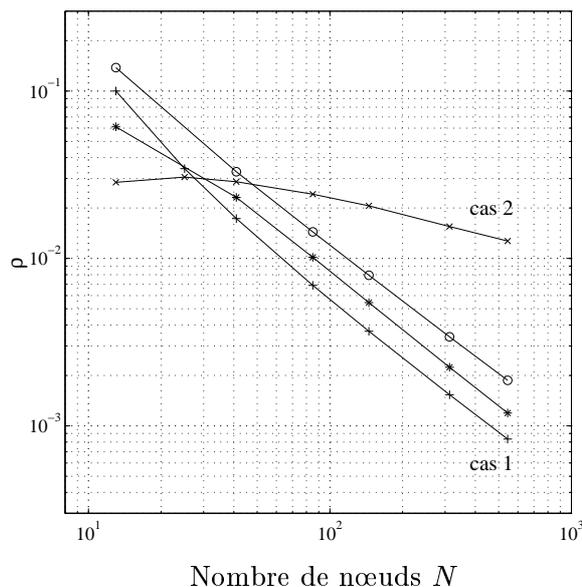


FIG. III.12 - Évolution du résidu en fonction du nombre de nœuds N . Dans le cas 1, les entrées de courant ont un spectre bande étroite – entrée proche de la sinusoïde ; dans le cas 2, le spectre est beaucoup plus étendu – signal triangulaire en entrée.

La première remarque que l'on peut faire au vu de ces résultats, c'est que le résidu converge bien vers 0 comme prévu lorsque la taille des éléments décroît. Ensuite, il semble que la précision de la résolution MÉF est plus directement sensible à la forme de la distribution \bar{i} qu'à la distribution de conductivité σ . En effet, dans le cas 1, où \bar{i} révèle un contenu spectral pauvre et basse fréquence, la décroissance du résidu est rapide tandis que le cas 2, où \bar{i} a un spectre plus étendu, la convergence s'avère plus lente. Ainsi, sur le plan qualitatif, il est facile de deviner que de rapides variations de la distribution de courant en entrée ont tendance à créer des lignes de courant qui reviennent vite à la frontière en pénétrant très peu le milieu. Celles-ci, à cause du très faible rayon de courbure qui les caractérise, nécessitent donc un maillage plus fin pour être approchées correctement. Au contraire, une plus grande précision sera obtenue avec des distributions d'entrées qui varient plus lentement. Typiquement, les distributions monopériodiques, tendant à générer des lignes de courant qui traversent le milieu de part en part, assurent la meilleure précision. Dépassant le cadre du présent travail, une étude plus précise de l'influence de la distribution d'entrée peut être effectuée en analysant le comportement de l'opération $\bar{i} \rightarrow \bar{i}'$, *i.e.*, des valeurs propres de l'opérateur \mathbf{H} défini par

$$\mathbf{H} := -\bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{G}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D}, \quad (\text{III.57})$$

opérateur qui, si la discrétisation était parfaite, vaudrait l'identité.

D'autre part, on observe que la vitesse de décroissance du résidu est similaire à celle de $\nu(\sigma)$ dans le cas 3, *i.e.*, environ une demi-décade par pas de résolution croissante. En comparant les valeurs du graphique, on peut en tirer une règle empirique très simple

d'estimation de $\nu(\sigma)$:

$$\boxed{\nu(\sigma) \approx \frac{\rho}{2}.} \quad (\text{III.58})$$

7 Conclusion : choix du modèle MÉF et choix des entrées

Pour conclure, il apparaît que les modèles MÉF en TIÉ réalisent un très bon compromis entre la précision d'une part et le coût de calcul d'autre part. En effet, ils fournissent, pour un domaine maillé avec $N = 200$ nœuds, une simulation du modèle direct précise à environ 50 dB pour un coût de $O(N^2)$ opérations en virgule flottante. À ce stade de précision, on peut même affirmer que l'hypothèse la plus simplificatrice (hormis la modélisation des électrodes) est la modélisation 2D en courant continu d'une expérience 3D effectuée avec des courants quasi-statiques. Un effort d'affinement du modèle en vue de réduire le bruit de discrétisation au delà de 70 dB risque donc d'être inefficace si c'est la fidélité à l'expérience qui est recherchée. À cet égard, on retiendra qu'il peut être préférable d'utiliser $\bar{\mathbf{i}} \rightarrow \bar{\mathbf{v}}$ si l'on sait à l'avance que la *conductivité de fond* que l'on cherche à reconstruire est moins élevée que celle des inhomogénéités qu'elle inclut, et *vice-versa*.

Nous constatons par ailleurs, à partir de l'estimateur empirique que constitue le résidu ρ , que la précision du modèle peut dépendre de manière assez significative de la nature de la distribution d'entrée. Si un gain de 10 à 15 dB supplémentaires est absolument requis, il peut être envisageable d'en tenir compte d'un point de vue expérimental, dans la mesure où cela ne risque pas d'affecter la qualité de l'estimation. Sur cette question, deux points vue semblent envisageables, selon les moyens de mise en œuvre dont on dispose :

- Un point de vue *quantitatif* qui envisage l'estimation de la conductivité dans le cadre d'une *optimisation d'expérience*. Il s'agit non seulement d'estimer la distribution de conductivité mais aussi, en cours d'expérience, de choisir des distributions d'entrée susceptibles d'améliorer les résultats d'estimations. Ainsi, dans [Hua et coll. 1991], les auteurs essaient, itérativement au cours de l'expérience, d'imposer des courants *optimaux*, *i.e.*, qui maximisent une distance appelée *pouvoir séparateur* définie dans [Isaacson 1986]. Il est aussi envisageable d'incorporer à ce type de procédé, par exemple à l'aide du calcul du résidu, un critère d'optimisation de précision numérique du modèle en fonction des courants d'entrée.

- Un point de vue *qualitatif*, qui requiert moins de moyens, consiste à opérer le choix des courants d'entrée à partir d'une analyse comportementale *a priori* sur les lignes de courant. Comme l'intérieur du domaine est plus difficile à estimer que les bords, on veillera à introduire des distributions susceptibles de générer des lignes de courant pénétrant profondément dans le milieu, typiquement, des distributions comprenant une composante monopériodique (*cf.* Fig. III.13). Ensuite, on pourra ajouter des composantes spatialement

plus « haute fréquence » pouvant améliorer la résolution de l'estimation dans des zones de profondeur intermédiaire. Il s'agit surtout ici de trouver un compromis entre la richesse des distributions d'entrée d'une part et la précision du modèle d'autre part.

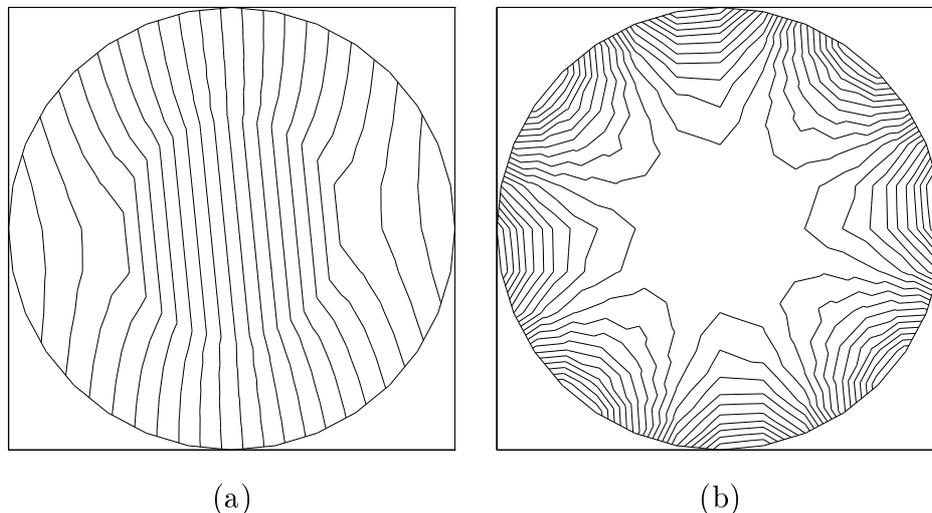


FIG. III.13 - Influence de la distribution d'entrée sur les lignes de courant. Nous reprenons l'exemple du chap. II § 6.2, discrétisé avec un MCCC de $P = 256$ éléments, et une zone centrale de conductivité 10 fois supérieure au fond. En (a), lignes de courant obtenues par la MÉF avec, pour distribution d'entrée, une période de sinusoïde ; en (b), même cas avec quatre périodes de sinusoïde. On constate d'abord que dans le cas (a) que l'approximation MÉF est plus précise que dans le cas (b) – qualitativement, on s'attend en effet à des trajectoires non seulement continues mais aussi dérivables pour les lignes de courant. Ensuite, on observe dans le cas (a) que les lignes de courant pénètrent plus profondément dans le milieu.

Pour les méthodes d'inversion qui sont présentées dans la suite, nous adoptons le point de vue *qualitatif*. Les méthodes d'inversions que nous proposons font appel à plusieurs *jeux d'observations*, *i. e.*, plusieurs distributions d'entrée linéairement indépendantes pour estimer une même distribution de conductivité. Par souci de simplicité, nous construisons ces jeux en utilisant des rotations successives d'une même distribution d'entrée autour de $\bar{\Omega}_h$. L'exemple (b) de la figure III.11, construit à partir de deux morceaux de sinusoïdes, est souvent utilisé par la suite. Il est monopériodique, d'un contenu spectral ni trop riche ni trop pauvre, et ne contient pas de symétrie paire ou impaire. En effet, en cas d'invariance par rotation de la distribution de conductivité à estimer, l'indépendance des systèmes linéaires MÉF à résoudre risque d'être affectée par rotations des distributions d'entrée.

8 Annexe

8.1 Démonstration de la propriété III.1

Pour démontrer l'égalité (III.22), on étudie 4 cas (cf. Fig. III.14) différents de l'égalité suivante :

$$(\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C})_{ij} = \sum_{p=1}^P b_{pi} c_{pj} - c_{pi} b_{pj}.$$

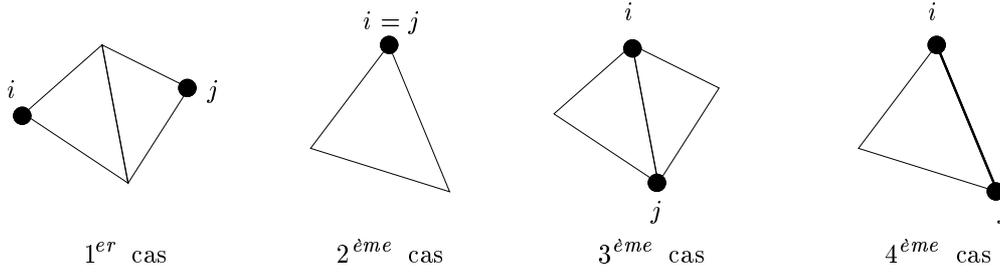


FIG. III.14 - *Formule de Green discrète. Quatre configurations différentes apparaissent pour les paires (i, j) . Dans les trois premières, on obtient $(\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C})_{ij} = 0$. Dans la quatrième où l'arête (ij) est une arête frontière, on obtient $\pm \frac{1}{2}$ selon l'orientation de $i \rightarrow j$.*

– 1^{er} cas : aucun élément ne contient à la fois le nœud (i) et le nœud (j) . Alors, $\forall i$, $b_{pi} = 0$ et $\forall j$, $c_{pj} = 0$ donc $(\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C})_{ij} = 0$;

– 2^{ème} cas : $i = j$. On a immédiatement

$$(\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C})_{ii} = \sum_{p=1}^P b_{pi} c_{pi} - c_{pi} b_{pi} = 0 ;$$

– 3^{ème} cas : (ij) forme une arête commune à 2 éléments adjacents (p_1) et (p_2) . Notons (k_1) et (k_2) les indices des deux autres sommets respectifs de ces éléments. Alors,

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C})_{ij} &= b_{p_1 i} c_{p_1 j} - c_{p_1 i} b_{p_1 j} + b_{p_2 i} c_{p_2 j} - c_{p_2 i} b_{p_2 j} \\ &= \frac{1}{4|A^{p_1}|} [(y_{k_1} - y_j)(x_{k_1} - x_i) - (y_i - y_{k_1})(x_j - x_{k_1})] + \\ &\quad \frac{1}{4|A^{p_2}|} [(y_{k_2} - y_j)(x_{k_2} - x_i) - (y_i - y_{k_2})(x_j - x_{k_2})]. \end{aligned}$$

En développant l'aire $|A^{p_1}|$ avec la formule (III.3) d'une part, et en supposant que le pourtour $i \rightarrow j \rightarrow k_1$ est orienté dans le sens trigonométrique d'autre part, on obtient

pour le premier terme du membre de droite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4|A^{p_1}|}[\dots] &= \frac{1}{2} \frac{y_{k_1}x_{k_1} - x_i y_{k_1} - y_j x_{k_1} + y_j x_i - y_i x_j + y_i x_{k_1} + y_{k_1} x_j - y_{k_1} x_{k_1}}{|-x_i y_{k_1} - y_j x_{k_1} + y_j x_i - y_i x_j + y_i x_{k_1} + y_{k_1} x_j|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{A^{p_1}}{|A^{p_1}|}. \end{aligned}$$

Pour le second terme, le triangle $i \rightarrow j \rightarrow k_2$ est orienté dans le sens contraire, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4|A^{p_2}|}[\dots] &= \frac{1}{2} \frac{A^{p_2}}{|A^{p_2}|} = -\frac{1}{2} \frac{A^{p_1}}{|A^{p_1}|}, \text{ d'où :} \\ (\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C})_{ij} &= 0 ; \end{aligned}$$

– 4^{ème} cas : l'arête (ij) est une arête frontière. Dans ce cas, on se retrouve dans l'une des deux situations du cas précédent, ce qui donne finalement :

$$(\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C})_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i \rightarrow j \text{ est dans le sens trigonométrique,} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } i \rightarrow j \text{ est dans le sens contraire.} \end{cases}$$

En résumé, le seul cas de non nullité pour la matrice $\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C}$ intervient pour des paires d'indices correspondant à des points adjacents de la frontière. Par conséquent, en introduisant la matrice de différence \mathbf{D} définie en (III.24) et la matrice de projection sur la frontière $\bar{\mathbf{P}}$ donnée en (III.23), on aboutit finalement à l'équation (III.22) :

$$\mathbf{C}^t \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{C} = -\bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{P}}.$$

8.2 Démonstration de la propriété III.2

Nous démontrons ici que, pour tout σ , $\{\mathbf{1}_N\}$ est le noyau de $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ et $\mathbf{\Gamma}_\sigma$. On opère ici la démonstration sur $\mathbf{\Lambda}_\sigma$, le raisonnement étant exactement identique pour $\mathbf{\Gamma}_\sigma$.

Soit \mathbf{u} un vecteur propre de $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ pour la valeur propre nulle. Puisque $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ est définie positive, ceci est équivalent à :

$$\mathbf{u}^t \mathbf{\Lambda}_\sigma \mathbf{u} = 0.$$

Or, l'équation (III.26a) définissant $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ peut se réécrire :

$$\mathbf{\Lambda}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^t & \mathbf{C}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_\sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

Donc, \mathbf{u} est un vecteur propre de $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ pour la valeur propre nulle *ssi* :

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma^{1/2} \mathbf{B} \mathbf{u} &= \mathbf{0}_P \\ \text{et } \Delta_\sigma^{1/2} \mathbf{C} \mathbf{u} &= \mathbf{0}_P, \end{aligned}$$

ce qui, compte tenu du caractère diagonal de Δ_σ (donc de $\Delta_\sigma^{1/2}$) et du caractère strictement positif (donc non nul) des σ_p , est équivalent à :

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}_P \quad (\text{III.59})$$

$$\text{et } \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0}_P. \quad (\text{III.60})$$

Désormais, il n'est pas difficile de voir que $\mathbf{u} = \mathbf{1}_N$ vérifie la condition (III.60). En effet, rappelons que les matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} sont des matrices creuses dont les éléments sont donnés par :

$$b_{pn} := \begin{cases} \frac{b_n^p}{2\sqrt{|A^p|}} & \text{si } n \in \mathcal{S}(p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.61a})$$

$$\text{et } c_{pn} := \begin{cases} \frac{c_n^p}{2\sqrt{|A^p|}} & \text{si } n \in \mathcal{S}(p) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.61b})$$

où $\mathcal{S}(p)$ désigne les indices des trois sommets de l'élément Ω^p . Chaque ligne des matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} ne comprend donc que trois éléments non nuls qui, à un facteur près, sont les b_n^p et les c_n^p . Rappelons la définition de ces dernières données lors de l'introduction des coordonnées barycentriques. Dans un triangle dont les sommets sont numérotés n_1 , n_2 et n_3 ,

$$b_{n_1}^p = y_{n_2}^p - y_{n_3}^p \quad (\text{III.62a})$$

$$\text{et } c_{n_1}^p = x_{n_3}^p - x_{n_2}^p, \quad (\text{III.62b})$$

$b_{n_2}^p$, $c_{n_2}^p$ et $b_{n_3}^p$, $c_{n_3}^p$ étant déduits de $b_{n_1}^p$, $c_{n_1}^p$ par permutation circulaire. Les b_n^p et c_n^p représentant donc les différences d'ordonnées et d'abscisses des trois côtés d'un élément, il est clair que, pour tout $p = 1..P$, on a :

$$\sum_{i=1}^3 b_{n_i}^p = 0$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^3 c_{n_i}^p = 0$$

ce qui se réécrit matriciellement par

$$\begin{bmatrix} b_{n_1} & b_{n_2} & b_{n_3} \end{bmatrix} \mathbf{1}_3 = 0 \quad (\text{III.63})$$

$$\begin{bmatrix} c_{n_1} & c_{n_2} & c_{n_3} \end{bmatrix} \mathbf{1}_3 = 0 \quad (\text{III.64})$$

soit encore, globalement,

$$\mathbf{B}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_P \quad (\text{III.65})$$

$$\text{et } \mathbf{C}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_P. \quad (\text{III.66})$$

ce qui signifie que $\mathbf{u} = \mathbf{1}_N$ vérifie la condition (III.60).

Montrons maintenant que si \mathbf{u} est vecteur propre de Λ_σ pour la valeur propre nulle, alors il existe un scalaire α tel que $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{1}_N$. Soit $p \in \{1, \dots, P\}$. Notons, de même que précédemment n_1, n_2 et n_3 les indices des sommets de Ω^p et posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3^p &:= \begin{bmatrix} b_{n_1} & b_{n_2} & b_{n_3} \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{c}_3^p &:= \begin{bmatrix} c_{n_1} & c_{n_2} & c_{n_3} \end{bmatrix}^t \\ \text{et } \mathbf{u}_3^p &:= \begin{bmatrix} u_{n_1} & u_{n_2} & u_{n_3} \end{bmatrix}^t. \end{aligned}$$

Alors, de même que pour l'équation (III.64), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3^{p,t} \mathbf{u}_3^p &= 0 \\ \text{et } \mathbf{c}_3^{p,t} \mathbf{u}_3^p &= 0, \end{aligned}$$

ce qui signifie que, dans un espace vectoriel tridimensionnel, \mathbf{u}_3^p est à la fois orthogonal à \mathbf{b}_3^p et \mathbf{c}_3^p . Or, si l'élément Ω^p n'est pas dégénéré (*i.e.*, possède une surface non nulle), \mathbf{b}_3^p et \mathbf{c}_3^p ne peuvent être colinéaires, – en se plaçant dans un système de coordonnées annulant une composante b_{n_1} , on se rend compte que l'autre composante c_{n_1} est nécessairement non nulle. Donc \mathbf{b}_3^p et \mathbf{c}_3^p définissent un plan vectoriel \mathcal{P}_3^p et $\mathbf{u}_3^p \perp \mathcal{P}_3^p$. Mais l'équation (III.64) donne pareillement $\mathbf{1}_3 \perp \mathcal{P}_3^p$. Par conséquent, il est nécessaire que $\mathbf{1}_3$ et \mathbf{u}_3^p soient colinéaires. Il existe donc un réel α_p tel que

$$\mathbf{u}_3^p = \alpha_p \mathbf{1}_3.$$

Ensuite, considérant tous les éléments d'indices p_n ayant pour sommet le nœud n , il est nécessaire que tous les α_{p_n} aient la même valeur puisque $u_n = \alpha_{p_n}$. En répétant ce raisonnement de proche en proche sur tous les nœuds contenant des éléments adjacents, il apparaît qu'il existe un réel α , unique, tel que :

$$\forall p \in \{1, \dots, P\}, \alpha_p = \alpha,$$

ce qui aboutit à

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{1}_N.$$

D'où la propriété III.2 :

$$\mathcal{Ker}(\Lambda_\sigma) = \mathcal{Ker}(\Gamma_\sigma) = \{\mathbf{1}_N\}.$$

8.3 Démonstration du théorème III.1

Rappelons pour commencer que le problème direct (éq. (III.40)) s'écrit :

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}},$$

et que l'équation définissant les variations en sortie (III.42) s'écrit :

$$\bar{\mathbf{v}} + \delta \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} (\bar{\mathbf{i}} + \delta \bar{\mathbf{i}}).$$

On obtient donc

$$\delta \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{P}}_n (\mathbf{A}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} - \mathbf{A}_\sigma^{-1}) \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}} + \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \delta \bar{\mathbf{i}}. \quad (\text{III.67})$$

La démonstration consiste donc à normer les matrices qui interviennent et à utiliser la majoration $\|\mathbf{M}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{u}\|$, avec $\|\mathbf{M}\| := \sqrt{r(\mathbf{M}^t \mathbf{M})}$, où r désigne le rayon spectral (sauf mention explicite, les normes utilisées dans cette démonstration sont des normes 2).

Remarquons d'abord que $\|\bar{\mathbf{P}}_n\| = 1$ puisque $\bar{\mathbf{P}}_n^t \bar{\mathbf{P}}_n$ est une matrice diagonale ne contenant que des 1 excepté un 0 en (n, n) , $n \in [1..\bar{N}]$. D'autre part, \mathbf{D} étant une matrice circulante, $\mathbf{D}^t \mathbf{D}$ l'est aussi. Sachant que les valeurs propres d'une matrice circulante sont les coefficients de la transformée de Fourier discrète de sa première ligne, on démontre facilement que les valeurs propres de $\mathbf{D}^t \mathbf{D}$ s'écrivent :

$$\mu_k = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{4\pi k}{\bar{N}} \right], \quad n \in [1..\bar{N}],$$

ce qui donne $\|\mathbf{D}\| \leq 1$.

Par ailleurs, puisque \mathbf{A}_σ est définie positive, on a

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{A}_\sigma}^{\max} &= \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \mathbf{v}^t \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} = \|\mathbf{A}_\sigma\| \\ \text{et } \lambda_{\mathbf{A}_\sigma}^{\min} &= \inf_{\|\mathbf{v}\|=1} \mathbf{v}^t \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} = \|\mathbf{A}_\sigma^{-1}\|^{-1}, \end{aligned}$$

qui sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de \mathbf{A}_σ . La matrice \mathbf{Q} admet une décomposition en valeurs singulières (les λ_Θ) de sorte que

$$\forall \mathbf{v} \text{ t.q. } \|\mathbf{v}\| = 1, \quad \lambda_\Theta^{\min} \leq \|\mathbf{Q}\mathbf{v}\|^2 \leq \lambda_\Theta^{\max} \quad (\text{III.68})$$

car $\Theta = \mathbf{Q}^t \mathbf{Q}$ est hermitienne et inversible. D'autre part, puisque $[\Delta_\sigma]_4$ est une matrice diagonale ne contenant que les valeurs de σ , on a

$$\forall \mathbf{v} \text{ t.q. } \|\mathbf{v}\| = 1, \quad \sigma_{\min} = \left\| [\Delta_\sigma]_4^{-\frac{1}{2}} \right\|^{-2} \leq \frac{\left\| [\Delta_\sigma]_4^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}\mathbf{v} \right\|^2}{\|\mathbf{Q}\mathbf{v}\|^2} \leq \left\| [\Delta_\sigma]_4^{\frac{1}{2}} \right\|^2 = \sigma_{\max}. \quad (\text{III.69})$$

En multipliant (III.68) par (III.69) et en remarquant que $\mathbf{v}^t \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} = \left\| [\Delta_\sigma]_4^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q} \mathbf{v} \right\|^2$, on obtient :

$$\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min} \leq \left\| [\Delta_\sigma]_4 \mathbf{Q} \mathbf{v} \right\|^2 \leq \sigma_{\max} \lambda_{\Theta}^{\max},$$

soit exactement $\forall \mathbf{v}$ t.q. $\|\mathbf{v}\| = 1$,

$$\boxed{\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min} \leq \|\mathbf{A}_\sigma^{-1}\|^{-1} \leq \mathbf{v}^t \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} \leq \|\mathbf{A}_\sigma\| \leq \sigma_{\max} \lambda_{\Theta}^{\max}.} \quad (\text{III.70})$$

De ces encadrements, nous retenons les deux premières majorations qui nous intéressent :

$$\|\mathbf{A}_\sigma^{-1}\| \leq \frac{1}{\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min}} \quad (\text{III.71})$$

$$\text{et } \|\mathbf{A}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1}\| \leq \frac{1}{(\sigma + \delta\sigma)_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min}} \leq \frac{1}{\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min}}. \quad (\text{III.72})$$

Il nous reste donc à trouver une majoration de $\|\mathbf{A}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} - \mathbf{A}_\sigma^{-1}\|$. Pour cela, nous établissons d'abord le lemme suivant.

Lemme III.1. Soit deux matrices \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 réelles. On suppose \mathbf{A}_1 inversible et \mathbf{A}_2 symétrique, se décomposant sous la forme $\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}^t \Delta \mathbf{R}$, avec Δ matrice diagonale inversible. Alors, si $\|\mathbf{R}^t \mathbf{R}\| \|\Delta\| \|\mathbf{A}_1^{-1}\| < 1$ on a la majoration suivante :

$$\boxed{\|(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{-1} - \mathbf{A}_2^{-1}\| \leq \frac{\|\mathbf{A}_1^{-1}\|^2}{1 - \|\mathbf{R}^t \mathbf{R}\| \|\Delta\| \|\mathbf{A}_1^{-1}\|}.} \quad (\text{III.73})$$

Démonstration. Le lemme d'inversion matricielle, appliqué à $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, nous donne :

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{-1} - \mathbf{A}_2^{-1} = -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t (\Delta^{-1} + \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1}.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{-1} - \mathbf{A}_2^{-1}\| &\leq \|\mathbf{A}_1^{-1}\|^2 \|\mathbf{R}^t (\Delta^{-1} + \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t) \mathbf{R}\| \\ &\leq \|\mathbf{A}_1^{-1}\|^2 \|\mathbf{R}^t \mathbf{R}\| \|(\Delta^{-1} + \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t)^{-1}\| \\ &\leq \|\mathbf{A}_1^{-1}\|^2 \|\mathbf{R}^t \mathbf{R}\| \|\Delta\| \|(I + \Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse,

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - \|\mathbf{R}^t \mathbf{R}\| \|\Delta\| \|\mathbf{A}_1^{-1}\| \\ &< 1 - \|\Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t\| \\ &< 1 - \lambda_{(\Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t)}^{\max} \end{aligned}$$

puisque, pour une matrice quelconque \mathbf{B} , on a

$$|\lambda_{\mathbf{B}}| \leq \|\mathbf{B}\|.$$

Par conséquent, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - |\mathbf{v}^t \Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{v}| \\ &< \mathbf{v}^t (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{I} + \Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t$ est donc définie positive. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|(I + \Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t)^{-1}\| &= \lambda_{(I + \Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t)^{-1}}^{\max} \\ &= \left[\lambda_{I + \Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t}^{\min} \right]^{-1} \\ &\leq \left(1 - \left| \lambda_{\Delta \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{R}^t}^{\min} \right| \right)^{-1} \\ &\leq \left(1 - \|\mathbf{R}^t \mathbf{R}\| \|\Delta\| \|\mathbf{A}_1^{-1}\| \right)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui aboutit au résultat présenté dans le lemme. \square

Pour pouvoir appliquer le lemme, il suffit de prendre $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_\sigma$ et $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_{\delta\sigma}$. En effet, \mathbf{A}_σ étant linéaire en σ , il vient :

$$\mathbf{A}_{\sigma+\delta\sigma} = \mathbf{A}_\sigma + \mathbf{A}_{\delta\sigma}.$$

De plus, d'après l'équation III.43, on a

$$\mathbf{A}_{\delta\sigma} = \mathbf{Q}^t [\Delta_{\delta\sigma}]_4 \mathbf{Q}.$$

Si nous appelons Δ la matrice diagonale extraite de $[\Delta_{\delta\sigma}]_4$ ne possédant plus que des éléments non nuls sur la diagonale, on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\mathbf{A}_{\delta\sigma} = \mathbf{R}^t \Delta \mathbf{R}$$

où \mathbf{R} contient les lignes de \mathbf{Q} correspondant aux éléments non nuls de $[\Delta_{\delta\sigma}]_4$. Par conséquent, pour utiliser le lemme, on utilise d'une part

$$\|\Delta\| = \|[\Delta_{\delta\sigma}]_4\| = \|\delta\sigma\|_\infty = |\delta\sigma|_{\max},$$

et d'autre part la majoration (III.71) ainsi que la définition $\lambda_{\Theta}^{\max} := \|\mathbf{Q}^t \mathbf{Q}\| \geq \|\mathbf{R}^t \mathbf{R}\|$. Une condition suffisante pour obtenir la condition $\|\mathbf{R}^t \mathbf{R}\| \|\Delta\| \|\mathbf{A}_1^{-1}\| < 1$ est donc que $|\delta\sigma|_{\max} < \sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min} / \lambda_{\Theta}^{\max}$, ce qui constitue une hypothèse du théorème. On obtient alors

$$\|\mathbf{A}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} - \mathbf{A}_\sigma^{-1}\| \leq \frac{\lambda_{\Theta}^{\max} |\delta\sigma|_{\max}}{\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min} (\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min} - |\delta\sigma|_{\max} \lambda_{\Theta}^{\max})}.$$

Maintenant que nous avons opéré toutes les majorations de matrice, il suffit de les appliquer à (III.67) pour obtenir

$$\|\delta\tilde{\mathbf{v}}\|_2 \leq \frac{\lambda_{\Theta}^{\max} |\delta\sigma|_{\max}}{\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min} (\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min} - |\delta\sigma|_{\max} \lambda_{\Theta}^{\max})} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2 + \frac{\|\delta\tilde{\mathbf{i}}\|_2}{\sigma_{\min} \lambda_{\Theta}^{\min}}$$

qui est le résultat recherché.

Deuxième partie

Résolution du problème inverse de
tomographie d'impédance électrique :
méthodes et mise en œuvre

DANS LA SECONDE PARTIE de ce travail, nous commençons (*cf.* chapitre IV) par proposer une méthode d'estimation régularisée de type *maximum a posteriori* (MAP) pour le problème inverse de TIÉ. Nous montrons que cette approche méthodologique, utilisée habituellement avec succès lors de la résolution de problèmes inverses linéaires, aboutit à des résultats performants en TIÉ. En effet, par rapport aux méthodes pré-existantes, des améliorations apparaissent, aussi bien en terme de robustesse au bruit et d'efficacité algorithmique qu'en terme de résolution (en particulier dans la capacité à reconstruire des zones fortement contrastées).

Dans le chapitre V, nous essayons d'exploiter le caractère *bilinéaire* de la modélisation du problème direct de TIÉ pour construire une méthode d'estimation de la *moyenne a posteriori* (MP), en particulier grâce à la l'échantillonnage de Gibbs (EG). À partir d'un exemple simple, directement calqué sur les difficultés spécifiques du problème de TIÉ, ou de tout autre problème inverse bilinéaire comprenant une contrainte elle-même bilinéaire (*e.g.*, la tomographie de diffraction), nous montrons que l'utilisation conjointe de l'EG et du principe *d'échantillonnage pondéré* permet une détermination stochastique relativement efficace de la MP. Pour terminer, nous détaillons les étapes d'un algorithme rapide mettant en œuvre l'estimation de la MP en TIÉ.

CHAPITRE IV

RÉSOLUTION MAP DU PROBLÈME INVERSE DE TIÉ

NOUS PROPOSONS ici une méthode de résolution du problème inverse de TIÉ reposant sur la maximisation de la loi *a posteriori* (MAP). Parmi les méthodes déjà utilisées en TIÉ, une grande majorité s'interprètent, dans le cadre des méthodes de critère (*cf.* chapitre I), comme des cas particuliers de mise en œuvre du MAP. Nous présentons ici les perfectionnements que nous introduisons pour cette méthode, qui préservent en particulier le caractère non linéaire du modèle direct MÉF que nous adoptons. Les résultats présentés attestent les améliorations significatives de la qualité et de la robustesse apportées par la méthode à la résolution du problème inverse de TIÉ.

1 Présentation des méthodes existantes

Les travaux de reconstruction en TIÉ sont nombreux dans la littérature. On peut distinguer deux familles d'approches. On trouve d'une part les approches *paramétriques* reposant sur des méthodes *analytiques* de résolution du problème direct – au sens où nous l'avons défini dans le chapitre III. Alors, le problème se ramène à l'étude d'un petit nombre de paramètres hétérogènes (*e.g.*, pour un milieu circulaire, angle et position et rayon de d'une inhomogénéité circulaire). On trouve d'autre part les approches *non paramétriques* reposant sur un découpage du milieu (quelconque ici) en pixels, lesquels correspondent à des variables homogènes : en TIÉ, des conductivités. Ces méthodes utilisent alors les méthodes de résolution *discrètes* ou *mixtes*.

Les méthodes paramétriques sont donc surtout utilisées dans des cas très particuliers. Comme nous nous situons ici dans le cadre de traitements de données numériques d'une part et que nous faisons l'hypothèse d'une géométrie quelconque d'autre part, nous ne considérons pas plus avant les méthodes paramétriques, hormis pour des considérations qualitatives. Mentionnons cependant les travaux de [Seagar et Bates 1985] pour des géométries circulaires et ceux de [Bates et coll. 1980], [Lang 1986] et [Isaacson 1986], ces derniers visant surtout à quantifier la résolution et le pouvoir séparateur que l'on peut obtenir par ces méthodes, sans toutefois introduire d'information *a priori*.

Nous avons vu dans la première partie qu'en TIÉ, le comportement des observations par rapport à la distribution de conductivité est fortement non linéaire. Aussi trouvons nous dans la littérature assez peu de modèles directs linéaires à part entière. Dans [Cohen-Bacrie 1994], l'auteur présente les différentes formes de linéarisation utilisées dans la littérature. Ces approximations reviennent à se placer dans l'hypothèse ou les lignes de courant sont quasi-rectilignes (à une transformation géométrique près), ce qui revient à linéariser le modèle autour d'une conductivité uniforme « moyenne », soit en faisant l'hypothèse que le contraste sur la distribution de conductivité est très faible¹, soit en supposant que l'étendue d'une zone inhomogène est très limitée par rapport au domaine tout entier (*cf.* [Seagar et Bates 1985]). Dans [Dobson et Santosa 1994], les auteurs choisissent aussi de linéariser selon la première méthode. Nous avons remarqué dans le chapitre III que cette linéarisation était peu judicieuse puisque les méthodes discrètes préservent « naturellement » le caractère non-linéaire du modèle direct tout en étant résolues plus rapidement que les méthodes linéaires grâce au caractère *creux* des matrices à inverser². La plupart des modèles directs utilisés sont donc non linéaires.

En revanche, un grand nombre de méthodes d'estimation utilisées reposent sur des linéarisations successives appelées en TIÉ *rétroprojections*. En effet, ne disposant pas, même après discrétisation, de formule explicite pour l'inversion, les seuls schémas envisageables sont de types *itératifs*. Le principe de ces algorithmes est le suivant ;

1. Choisir une première estimation de conductivité σ_0 . La plupart du temps, celle-ci est une distribution uniforme proche de la distribution « moyenne » sur le domaine ;
2. Jusqu'à convergence, *i. e.*, $\|\sigma_m - \sigma_{m-1}\| < \epsilon$, répéter :
3. Pour $k \in \{1, \dots, K\}$, indice du jeu d'observation, itérer :
 - (a) À partir de la distribution de courant imposée $\bar{\mathbf{i}}^k$ et σ_0 , résoudre le problème direct, ce qui donne avec le modèle MÉF que nous adoptons :

$$\bar{\mathbf{v}}_m^k = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma_{m-1}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^\dagger \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}^k$$

puis en déduire les lignes de courant reliant tous les nœuds de la frontière ;

- (b) Grâce à la loi de conservation du courant entre deux lignes de courant successives, rétroprojeter, soit de manière uniforme soit de manière plus élaborée, la différence entre les tensions observées $\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k$ et les tensions estimées $\bar{\mathbf{v}}_m^k$, sur les éléments de conductivités situés entre les deux lignes, de sorte que la nouvelle distribution de conductivité s'écrit

$$\sigma_m = \sigma_{m-1} + \delta\sigma_m$$

où $\delta\sigma_m$ est la correction de la conductivité due à la rétroprojection.

1. Cette hypothèse est tout à fait comparable à l'approximation de Born en tomographie de diffraction.
 2. Il en est avec la MDF comme pour la MÉF : les deux méthodes sont construites par des linéarisations locales sur chaque pixel de l'image à l'intérieur duquel les lignes de courant et les équipotentielles sont approchées par des segments de droite. La prise en compte globale de toutes ces linéarisations locales est donc plus efficace analytiquement et algorithmiquement qu'une linéarisation globale.

Parmi les travaux utilisant la rétroprojection (qui correspondent à la majorité des méthodes d'estimation disponibles), on peut mentionner ceux de [Tasto et Schomberg 1978], [Barber et Brown 1986], [Yorkey et coll. 1987], [Kohn et McKenney 1990] ainsi que ceux de [Santosa et Vogelius 1990]. Les méthodes de rétroprojection correspondent à une mise en œuvre d'un algorithme de type *point fixe*. Interprétées dans le cadre des méthodes de critère, elles correspondent à la recherche de minima locaux. Cependant, elles ne possèdent pas toujours des propriétés de convergence garanties. En outre, elles s'avèrent extrêmement sensibles au bruit si bien que les études se restreignent à des simulations sous l'hypothèse d'une absence de bruit en sortie du modèle.

Nous avons vu au chapitre II que le caractère bien posé au sens de Hadamard du problème inverse de TIÉ laisse en réalité présager une forte instabilité des algorithmes de reconstruction³. Bien qu'une grande majorité d'auteurs aient perçu cette difficulté, ils sont peu nombreux à poser le problème dans le cadre des méthodes de critère de façon à régulariser. C'est en 1991 qu'apparaissent, avec [Hua et coll. 1991] puis [Woo et coll. 1993] les premières méthodes de critère pénalisé. Les auteurs remarquent en effet que la convergence des algorithmes de minimisation du seul critère de fidélité aux données est très lente : ce dernier possède en effet des vallées très allongées dans lesquelles les algorithmes de descente « coincent » (*cf.* chapitre I § 3.2). Les auteurs introduisent alors un terme de pénalisation :

$$J_{\text{apr}}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\sigma},$$

dans le but de stabiliser la minimisation (effectuée avec l'algorithme de Newton-Raphson). Chez ces auteurs, l'objectif se limite clairement à une stabilisation de l'algorithme car le choix de ce terme de pénalisation, qui correspond à un *a priori* séparable de rappel à zéro sur chaque élément de conductivité, est très discutable connaissant la contrainte de positivité sur $\boldsymbol{\sigma}$. Toutefois grâce à cette pénalisation, les auteurs ont pu travailler sur des données réelles. Ils ont estimé le *rapport signal à bruit* (RSB) en sortie à environ 66 dB.

Pour s'attaquer plus résolument au caractère mal posé du problème de TIÉ, certains auteurs ont commencé à opérer une régularisation dans le cadre classique de l'estimation linéaire. C'est la raison pour laquelle sont apparus tardivement des méthodes d'estimation reposant sur des approximations linéaires du problème direct. Ainsi, dans [Chen et Paoloni 1992], les auteurs utilisent une linéarisation du problème direct et opèrent une troncature des valeurs singulières pour résoudre le problème inverse. On trouve aussi dans [Cohen-Bacrie 1994] une linéarisation discrète pour le problème direct, valide non pas dans le cas d'un très faible contraste pour les zones inhomogènes mais dans l'hypothèse où le support de ces zones est très étroit par rapport au domaine. L'auteur justifie, par une formulation bayésienne de l'inversion [Demoment 1989], d'opérer la minimisation d'un critère régularisé à partir d'une loi *a priori* markovienne convexe. L'emploi d'un modèle *a priori* gaussien lui permet d'obtenir une estimation robuste de l'objet. Toujours

3. En effet, la troisième condition de Hadamard (continuité) n'est vérifiée qu'avec une majoration à tangente infinie.

dans ce cadre de modèles directs linéaires, on trouve dans [Dobson et Santosa 1994] l'utilisation d'un *a priori* \mathcal{L}_1 sur les différences entre σ_p voisins. Si $e(p)$ désigne les indices des voisins du site p , le terme d'*a priori*, encore appelé *critère de variations totales* (cf. chapitre I § 3.4.3), s'écrit :

$$J_{\text{apr}}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda \sum_p \sum_{q \in e(p)} |\sigma_p - \sigma_q|.$$

Pour introduire cette régularisation markovienne, tous ces auteurs ont utilisé une discrétisation cartésienne du domaine Ω .

Remarque IV.1 (Utilisation de la formulation variationnelle comme critère).

Dans [Kohn et McKenney 1990], les auteurs essaient aussi d'utiliser de manière originale la propriété de définie positivité de la formulation variationnelle (III.28) pour essayer de la minimiser. Rappelons que cette formulation qui s'écrit

$$\Pi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{i}^t \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{i} - \bar{\boldsymbol{v}}^t \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{i}}, \quad (\text{IV.1})$$

est utilisée pour résoudre les deux modèles directs adjoints $\bar{\boldsymbol{i}} \rightarrow \boldsymbol{v}$ et $\bar{\boldsymbol{v}} \rightarrow \boldsymbol{i}$ en dérivant par rapport aux inconnues (respectivement \boldsymbol{v} ou \boldsymbol{i}) tout en supposant connus $\boldsymbol{\sigma}$ et respectivement $\bar{\boldsymbol{i}}$ ou $\bar{\boldsymbol{v}}$. Dans leur méthode, les auteurs utilisent ces deux modèles directs différents pour éliminer les inconnues \boldsymbol{i} et \boldsymbol{v} (rassemblant les composantes des courants et tensions situés à l'intérieur du domaine Ω) et n'avoir plus à optimiser qu'en fonction de $\boldsymbol{\sigma}$. La prise en compte de plusieurs jeux d'observations est obtenue en ajoutant les formulations correspondantes. L'idée intéressante de cette méthode réside dans la prise en compte de manière symétrique des deux modèles adjoints dans la procédure d'estimation. Nous avons remarqué en effet (cf. Fig. III.10) que le modèle $\bar{\boldsymbol{i}} \rightarrow \boldsymbol{v}$ est une approximation plus précise pour les $\sigma > 1$ tandis que le modèle $\bar{\boldsymbol{v}} \rightarrow \boldsymbol{i}$ est plus précis pour les $\sigma < 1$. Toutefois, au vu de nos propres essais en simulation (dans lesquels nous avons rajouté un terme de régularisation), il semble que cette méthode cumule les défauts des deux modèles plutôt que leurs qualités respectives et qu'elles ne donnent des résultats probants que pour des contrastes de conductivité proches de 1, *i.e.*, à l'endroit où les erreurs de discrétisation sont très faibles. On remarquera par ailleurs qu'il est délicat de trouver une interprétation bayésienne (avec en particulier un modèle d'observation) correspondant à la minimisation de ce critère.

Ainsi, au regard du cadre de résolution des problèmes inverses que nous exposons au chapitre I § 3, nous pouvons proposer certaines améliorations pour résoudre le problème inverse de TIÉ.

2 Estimation MAP de la log-conductivité

Dans ce paragraphe, nous proposons plusieurs améliorations pour l'estimation MAP de la distribution de conductivité en TIÉ. En premier lieu, nous étendons de manière explicite la régularisation à l'utilisation d'un modèle direct préservant la non linéarité du problème (au sens où la régularisation n'est pas une simple stabilisation algorithmique de la méthode). Pour cela, nous proposons, dans le choix de la loi *a priori*, d'utiliser une paramétrisation différente reposant sur la log-conductivité plutôt que la conductivité. Par ailleurs, afin d'utiliser un maillage triangulaire plus adapté à la discrétisation du domaine Ω qu'un maillage cartésien, nous introduisons une loi *a priori* pour laquelle nous avons étendu le caractère de dépendance markovienne à l'utilisation d'un pavage irrégulier (*cf.* chapitre I § 3.4.2). Nous montrons que l'utilisation d'une loi *a priori* de type *variations totales* sur la log-conductivité permet de reconstruire des distributions de conductivité très contrastées, tout en préservant le caractère discontinu entre d'éventuelles zones homogènes, ce qui constitue une amélioration très sensible par rapport aux méthodes préexistantes. En outre, la robustesse apportée à notre méthode par la régularisation nous permet d'autoriser une plus grande incertitude sur les mesures de tensions (nous abaissons le RSB jusqu'à 40 dB). Enfin, comme nous ne disposons pas ici de données réelles, nous utilisons pour simuler les observations un maillage MÉF plus fin que celui utilisé pour l'estimation.

2.1 Choix de la log-conductivité pour la reconstruction

Dans le paragraphe 3.4.1, nous établissons que la variable pertinente pour l'estimation n'est pas forcément la variable avec laquelle le problème direct est construit naturellement. C'est particulièrement le cas en TIÉ où plusieurs variables sont envisageables. Dans le tableau suivant, nous présentons diverses paramétrisations utilisées dans la littérature de TIÉ. À l'origine, celles-ci ne sont pas destinées à la régularisation car elles ont été utilisées dans les méthodes paramétriques de façon à aboutir à des configurations « proches de la linéarité ».

Pour essayer de qualifier ce que nous entendons par l'expression « proches de la linéarité », nous essayons de comparer les comportements de la sortie en tension en fonction de l'inconnue dans l'exemple suivant. Nous considérons un domaine de conductivité uniforme σ_0 à l'intérieur duquel il existe une zone homogène de conductivité σ (*e.g.*, l'exemple du chapitre II § 6.2 dans lequel Ω est circulaire et σ « en chapeau »). Le comportement qui nous intéresse et qui est le plus caractéristique des méthodes de reconstruction est donné par l'amplitude des tensions de sortie en fonction de la conductivité σ (ou plus précisément, du *contrast* $\frac{\sigma}{\sigma_0}$).

Typiquement, lorsque σ est proche de σ_0 , une variation de σ entraîne une variation notable de l'amplitude des tensions, quelque soit le sens de cette variation. En revanche,

lorsque le contraste est très faible ($\sigma \ll \sigma_0$) ou très élevé ($\sigma \gg \sigma_0$), une variation même notable de σ n'entraîne plus de variation sensible des tensions puisque le caractère conducteur déterminant pour la sortie est alors essentiellement déterminé par la zone extérieure de conductivité σ_0 . L'*adéquation linéaire asymptotique* (ALA) est donc meilleure pour des reparamétrisations comme γ et μ que pour σ et σ^{-1} (cf. le tableau ci-dessus). La variable μ semble même plus adéquate car la fonction $\mu(\frac{\sigma}{\sigma_0})$ est bornée. Ceci n'est pas très étonnant car μ est exactement la paramétrisation naturelle de l'exemple du chapitre II § 6.2.

| Distribution f | $f(\sigma) = \sigma$ | $f(\sigma) = \sigma^{-1}$ | $\gamma(\frac{\sigma}{\sigma_0}) := \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$ | $\mu(\frac{\sigma}{\sigma_0}) := \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma + \sigma_0}$ |
|------------------|------------------------------|-----------------------------------|--|---|
| ALA | médiocre | médiocre | assez bonne | bonne |
| Symétrie | $f(\sigma) = f(\sigma^{-1})$ | $f(\sigma) = f(\sigma^{-1})$ | $\gamma(\frac{\sigma}{\sigma_0}) = -\gamma(\frac{\sigma_0}{\sigma})$ | $\mu(\frac{\sigma}{\sigma_0}) = -\mu(\frac{\sigma_0}{\sigma})$ |
| Contraintes | $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$ | $\sigma^{-1} \in \mathbb{R}^{+*}$ | $\gamma \in \mathbb{R}$ | $\mu \in]-1, 1[$ |
| Monotonie | \nearrow | \searrow | \nearrow | \nearrow |
| Références | nombreuses | [Inman et coll. 1973] | [Barber et Brown 1986] | [Isaacson 1986] |

Néanmoins, l'intérêt d'une reparamétrisation réside aussi dans l'espace de travail résultant (cf. chapitre I § 3.4.1). À cet égard, c'est la variable $\gamma(\frac{\sigma}{\sigma_0}) = \ln(\frac{\sigma}{\sigma_0})$ qui est la plus pratique puisque son utilisation ne requiert pas de contrainte d'espace ($\gamma \in \mathbb{R}$). En outre, nous avons aussi remarqué que ce type de paramétrisation bijective $y = \ln x$, $x > 0$, se révèle plus pertinente car elle correspond mieux à la perception linéaire intuitive de l'utilisateur. Ainsi, dans les applications biomédicales, la perception de la résistivité σ ou de la résistivité σ^{-1} est plutôt logarithmique : à titre d'exemple, les os ont une résistivité moyenne de 150 $\Omega.m$, les poumons à l'inspiration sont à 24 $\Omega.m$, à l'expiration ils sont à environ 7 $\Omega.m$, le liquide cébrospinal à 0,65 $\Omega.m$ (pour plus de détails, on peut se reporter à [Cohen-Bacrie 1994]). Pour toutes ces raisons, nous adoptons dans la suite de ce chapitre la *log-conductivité* γ comme paramétrisation pour construire la loi *a priori*.

2.2 Modèle direct MÉF non linéaire

Le modèle d'observations que nous utilisons repose sur le modèle discrétisé donné par l'équation (III.40), que nous étendons à K jeux d'observations indépendantes

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k + \bar{\mathbf{b}}^k, \quad (\text{IV.2})$$

où les $\bar{\mathbf{b}}^k$ sont supposés gaussiens $\mathcal{N}(0, s_k^2)$. D'après la remarque I.3, la prise en compte de plusieurs jeux de données différentes dans le cadre bayésien aboutit, pour le MAP, à la minimisation d'un critère (I.26). L'utilisation de (IV.2) pour le modèle des observations amène donc pour le MAP à utiliser pour le terme de fidélité aux données le critère suivant :

$$J_{\text{obs}}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{k=1}^K \frac{\|\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_\sigma^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k\|^2}{2s_k^2}.$$

Compte tenu du choix de la log-conductivité comme variable de reconstruction, ce terme de fidélité se réécrit :

$$J_{\text{obs}}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k=1}^K \frac{\|\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\text{exp}}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{t}}_{\text{obs}}^k\|^2}{2s_k^2}. \quad (\text{IV.3})$$

Ainsi que le montre la figure IV.1, ce critère n'est pas convexe. Lorsque l'on essaie de le minimiser sans régularisation, il apparaît que le minimum atteint ne dépend pas du point initial, ce qui laisse supposer qu'il peut être unimodal. Néanmoins, il s'avère très lent à minimiser à cause de « paliers » dans lesquels l'approximation locale du hessien s'avère très mal conditionnée de sorte qu'en pratique, le temps de minimisation dépend fortement du point d'initialisation de l'algorithme.

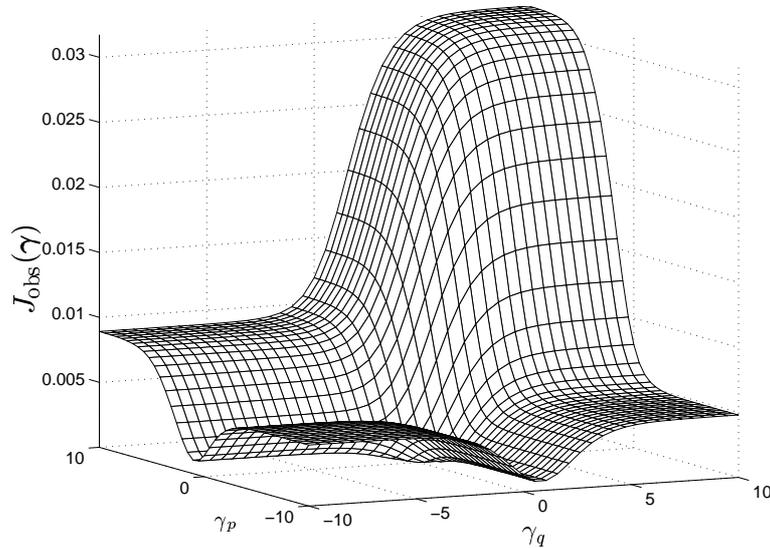


FIG. IV.1 - Allure du critère de fidélité aux données $J_{\text{obs}}(\boldsymbol{\gamma})$ obtenue en faisant évoluer deux éléments de conductivité différents γ_p et γ_q (on se place ici dans le cas où le bruit ajouté en sortie est nul, sachant que l'allure reste très similaire lorsqu'il ne l'est pas). On observe que le critère n'est pas convexe et qu'il possède des zones très « plates ». En terme de courbes de niveaux, ces zones se traduisent par des lignes de Talweg à fond quasi constant, qui ralentissent grandement la convergence des algorithmes de minimisation.

L'ajout d'un terme de pénalisation convexe, même s'il fait perdre cette éventuelle propriété d'unimodalité, va donc compenser ce déficit local de courbure et accélérer la convergence vers un minimum.

2.3 Loi *a priori* markovienne sur les différences pour le MAP

Nous choisissons d'introduire une loi *a priori* markovienne sur les différences entre pixels ayant des côtés communs, ce qui correspond à un voisinage d'ordre 1 au sens où nous l'avons défini au chapitre I § 3.4.2. Le choix d'un *a priori* markovien se justifie dans le sens où les distributions de conductivité des objets à reconstruire possèdent des propriétés

de douceur locale. En particulier dans le domaine biomédical, cette douceur se caractérise par des régions homogènes de conductivité quasi constante. Dans [Fox et Nicholls 1997], l'auteur utilise une information *a priori* très forte : les valeurs des pixels appartiennent à un ensemble fini de valeurs réelles connues à l'avance. Sans aller jusque là, il est possible d'introduire, pour estimer des log-conductivités à valeur dans \mathbb{R} , des lois *a priori* construites à partir de potentiels convexes favorisant une douceur locale tout en préservant les discontinuités entre les régions homogènes. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre I § 3.4.3, nous choisissons un champ de Markov homogène définie à partir de sa fonction d'énergie

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\gamma}) = \Phi(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{C}}^2} \phi_{\tau}(t_i),$$

où $N_{\mathcal{C}}^2$ désigne le nombre total de cliques d'ordre 2 du graphe du champ de Markov et $t_i = \gamma_p - \gamma_q$ est la différence première entre les deux éléments (p, q) associés à la i -ème clique. La fonction $\phi_{\tau}(t)$ est la fonction de potentiel $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_2$ de Huber donnée par :

$$\phi_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\tau^2} & \text{si } |t| < \tau, \\ 2\frac{|t|}{\tau} - 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Lorsque le seuil τ tend vers l'infini, on retrouve un *a priori* Gauss-Markov de douceur sur les différences tandis que lorsque τ tend vers zéro, on se rapproche d'une régularisation par variations totales favorisant en plus la reconstruction de discontinuités. Avec cette loi *a priori*, l'estimation MAP revient donc à mettre en œuvre la minimisation du critère suivant :

$$J(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k=1}^K \frac{\|\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\text{exp}}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{obs}}^k\|^2}{2s_k^2} + \frac{\lambda}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{q \in v(p)} \phi_{\tau}(\gamma_p - \gamma_q) \quad (\text{IV.5})$$

où $v(p)$ désigne l'ensemble des indices des voisins de l'élément d'indice p . L'expression du gradient de $J(\boldsymbol{\gamma})$, utilisé pour la minimisation, est présenté en annexe (*cf.* § 5).

3 Mise en œuvre du MAP

Dans ce paragraphe, nous présentons la mise en œuvre et les résultats de l'estimation MAP définie en (IV.5).

3.1 Simulation haute résolution des observations

Dans [Martin et Idier 1995] et [Martin et Idier 1996], nous mettons en œuvre l'estimation MAP de la log-conductivité sur un domaine circulaire de type MCCC (*cf.* Fig. III.6) $P = 256$ éléments. Pour cela, nous générons les données simulées en ajoutant en

sortie un bruit de 60 dB en utilisant pour le rapport signal à bruit la définition suivante pour chaque jeu d'observation $k \in \{1, \dots, K\}$:

$$\text{RSB}_k = \left[\frac{(\bar{\mathbf{v}}^k - v_m^k \mathbf{1}_{\bar{N}})^t (\bar{\mathbf{v}}^k - v_m^k \mathbf{1}_{\bar{N}})}{\bar{N} s_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.6})$$

où s_k^2 est la variance du bruit gaussien \mathbf{b}^k , $\mathbf{1}_{\bar{N}}$ est le vecteur de longueur \bar{N} ne contenant que des 1 et

$$v_m^k = \frac{\sum_{n=1}^{\bar{N}} \bar{v}_n^k}{\bar{N}} \quad (\text{IV.7})$$

est la moyenne arithmétique des tensions mesurées en sortie. Le RSB en dB est alors défini par :

$$\text{RSB}_k^{\text{dB}} = 20 \log \text{RSB}_k.$$

En outre, dans ces publications nous employons le même maillage pour la simulation des données observées et de la reconstruction.

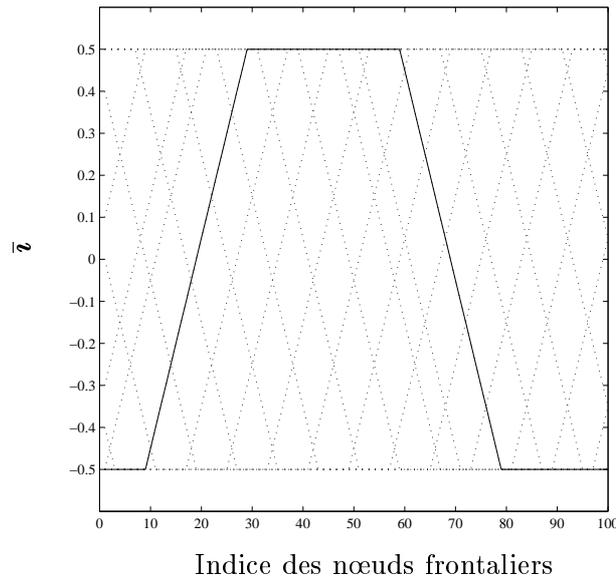


FIG. IV.2 - Allure des distributions de courant d'entrée imposées pour simuler les données d'origine (maillage fin sur 100 nœuds frontaliers). 13 jeux de données sont générées, correspondant à des décalages circulaires sur 100 points de la distribution représentée en trait plein. Cette distribution correspond qualitativement au compromis de richesse spectrale établi dans le chapitre III.

Nous présentons ici les résultats obtenus avec cette même mise en œuvre, hormis les modifications suivantes :

- Nous estimons la conductivité en abaissant le RSB jusqu'à 40 dB.
- Nous remplaçons le domaine Ω circulaire, discrétisé par MCCC, par un domaine en forme de *patatoïde* non convexe.

– Nous utilisons pour reconstruire les données un maillage construit à partir d’une triangularisation manuelle contenant $P = 296$ éléments, $N = 174$ nœuds et $\bar{N} = 50$ nœuds à la frontière. En revanche, les données simulées sont générées à partir d’un maillage plus fin de $P = 1002$ éléments, $N = 552$ nœuds et $\bar{N} = 100$ nœuds à la frontière, dont 1 sur 2 est exactement un des 50 points frontaliers du maillage plus grossier utilisé pour la reconstruction. Ainsi, pour la reconstruction, les $\bar{\mathbf{v}}^k$ et $\bar{\mathbf{i}}^k$ contiennent un point sur deux des tensions et courants générées à haute résolution (*cf.* Fig. IV.2). En outre, nous utilisons $K = 7$ jeux d’observations différents de sorte que la condition d’identifiabilité $K\bar{N} > P$ soit vérifiée. Enfin, la distribution de conductivité originale comprend un fond homogène de 1 S.m^{-1} avec deux inhomogénéités de 6 S.m^{-1} et 20 S.m^{-1} .

Les avantages d’une simulation « haute résolution » des données observées sont évidents. La principale est que la simulation des observations bruitées est plus réaliste puisque la MÉF converge vers la solution exacte de la formulation variationnelle II.16 lorsque la taille des éléments décroît. Ensuite, on peut remarquer que l’on peut se permettre une augmentation conséquente du coût de calcul de simulation des données observées (ici, il est multiplié par 4 environ) tandis que le coût de calcul de l’inversion reste inchangé.

Remarque IV.2 (À propos de l’« inverse crime »).

Lorsque l’on ne dispose pas de données réelles, on doit se contenter, pour valider la méthode, d’utiliser des données simulées. Dès lors, l’emploi de la même approximation (modèle direct) pour générer les données d’une part et pour les reconstruire d’autre part peut apparaître comme une faiblesse méthodologique de la procédure de validation, faiblesse communément appelée « inverse crime ». La portée de cette anticipation des conséquences néfastes d’une utilisation « mono-modèle » doit toutefois être modérée dans deux directions (nous nous appuyons pour cela sur l’étagement des modèles représenté sur la figure I.2) :

– Les conséquences néfastes d’une utilisation « mono-modèle » en simulation dépendent directement de la qualité du modèle direct utilisé dans les méthodes d’inversion. En particulier en TIÉ où le phénomène décrit est fortement non linéaire, il est clair que l’utilisation, en dehors de son champ de validité, d’une même approximation linéaire pour le modèle direct et pour l’inversion limitera beaucoup plus la portée des résultats que l’emploi d’un modèle direct qui préserve la non-linéarité du phénomène, et qui plus est comme celui obtenu avec la MÉF, converge vers le modèle analytique lorsque le maillage s’affine.

– L’apparente nécessité d’utiliser deux modèles différents peut provenir d’un défaut de prise en compte des erreurs de modélisation dans la construction et la mise en œuvre du problème inverse. L’utilisateur étant néanmoins conscient de l’existence d’incertitudes dans le modèle direct, il apparaît qu’une raison suffisante pour rendre pertinente la validation d’une méthode de reconstruction serait de trouver de bons résultats avec une méthode testée à partir de données générées par une autre méthode, *i.e.*, avec une incertitude différente. La prise en compte des incertitudes, négligée dans la construction des méthodes d’estimation, réapparaît nécessairement « en bout de chaîne » au moment de la validation. Toutefois, il faut remarquer que ce qui s’avère une condition *suffisante* pour la validation n’est nullement *nécessaire* du point de vue méthodologique, d’autant

plus qu'une telle condition peut s'avérer très restrictive. Cette difficulté est résolue explicitement par la régularisation qui intègre directement l'existence d'incertitudes dans la procédure d'inversion.

3.2 Minimisation par *gradient pseudo-conjugué* (GPC)

Le choix de l'algorithme de mise en œuvre de la minimisation du critère MAP s'avère déterminant pour des problèmes inverses à modèle direct non linéaire comme la TIÉ. Étant donné la charge de calcul élevée requise dans ces problèmes pour effectuer le calcul du modèle direct, il s'agit de trouver un bon compromis entre la recherche d'une grande précision dans l'aptitude à minimiser d'une part et l'économie des moyens de stockage des calculs d'autre part. Rappelons que nous choisissons ici une stratégie *sous-optimale* d'optimisation en choisissant des méthodes de descente déterministes opérant une minimisation locale sur un critère multimodal.

Une optimalité dans la recherche de ce compromis semble avoir été trouvée dans l'utilisation et le développement d'*algorithmes rapides*. Il s'agit de tirer parti de certaines propriétés propres du problème (matrices circulantes, matrices de Toeplitz, matrices creuses) pour mettre en œuvre des procédures d'optimisation rapides dédiées spécifiquement à la résolution du problème inverse en question. Le lecteur intéressé par ces aspects pourra se reporter à [Demoment 1987] ainsi qu'à [Mendel 1983], [Goussard et Demoment 1989], [Idier et Goussard 1990] et [Champagnat 1993] (entre autres) comme cas particulier de mise en œuvre pour les problèmes inverses linéaires. Une tentative dans ce sens a été effectuée par [Carfantan et coll. 1997] pour le problème inverse de tomographie de diffraction. Les propriétés de la mise en œuvre algébrique de ce problème, en utilisant un modèle direct préservant la non linéarité du phénomène de diffraction, sont très proches de celles que nous adoptons ici pour la TIÉ. Il s'agit pour l'auteur d'exploiter la propriété suivante : la minimisation par rapport à une seule composante du vecteur objet recherché revient à annuler une fraction rationnelle. Ceci lui permet de proposer un algorithme d'optimisation pixel par pixel (de type Gauss-Seidel) pour l'optimisation du critère MAP. On peut montrer que cette propriété existe de manière rigoureusement équivalente pour la minimisation du MAP en TIÉ, avec cependant la contrainte, pour la régularisation, de faire intervenir une fraction rationnelle en σ et non en γ , ce qui constitue une importante limitation au regard de la qualité remarquable des reconstructions obtenues avec la log-conductivité (*cf.* § 3.3). De plus, la mise à jour d'un pixel σ_p nécessite de recalculer globalement \mathbf{A}_σ^{-1} , ce qui n'est pas si avantageux (C'est pourquoi nous ne présentons pas ici les calculs permettant d'établir cette propriété). Dans le chapitre suivant, nous essayons d'exploiter la propriété de bilinéarité du problème et le caractère creux de la matrice de rigidité \mathbf{A}_σ en vue de construire un algorithme stochastique rapide pour estimer la MP.

En TIÉ, la plupart des méthodes qui ont été utilisées pour minimiser les critères sont des méthodes du second ordre, du type Newton Raphson. Cette utilisation se justifie à double titre. D'une part, pour les auteurs comme [Kohn et McKenney 1990] qui n'emploient pas de régularisation, l'utilisation de méthodes du second ordre permet de mieux prendre en compte les mauvais conditionnements locaux du hessien puisque le calcul de ce dernier intervient dans la détermination du point suivant de l'algorithme (pour plus de

détails sur les méthodes du second ordre, on pourra se reporter à [Press et coll. 1986]). D'autre part, pour les auteurs qui font appel à des critères « stabilisés » avec des *a priori* convexes comme [Hua et coll. 1991] ou [Woo et coll. 1993], il est important que le terme d'*a priori* ne supprime pas complètement les mauvais conditionnements locaux du critère afin de préserver le caractère non linéaire utilisé dans la méthode. Pour le critère MAP que nous désirons optimiser, la problématique n'est pas tellement différente : asymptotiquement (*i.e.*, pour les $\gamma_p \rightarrow \infty$ ou $\gamma_p \rightarrow -\infty$), le critère régularisé va tendre vers ∞ dans toutes les directions alors que ce n'est pas le cas sans régularisation (Il suffit pour voir cela de prendre $\boldsymbol{\gamma} = \gamma \mathbf{1}$, de faire tendre γ vers ∞ : on constate alors que $J(\boldsymbol{\gamma})$ demeure borné). En revanche, près du minimum, le critère régularisé doit préserver la non linéarité du problème « au risque » de conserver des conditionnements locaux relativement médiocres. C'est la raison pour laquelle les méthodes classiques du premier ordre (gradient optimal ou gradient à pas adaptatif) sont inutilisables en pratique : les directions successives de ces méthodes de descente étant orthogonales entre elles, ou proches de l'orthogonalité, la trajectoire de l'algorithme dans une vallée prononcée sera oscillante et l'algorithme très peu efficace (*cf.* Fig. IV.3). D'où l'utilité des méthodes du second ordre.

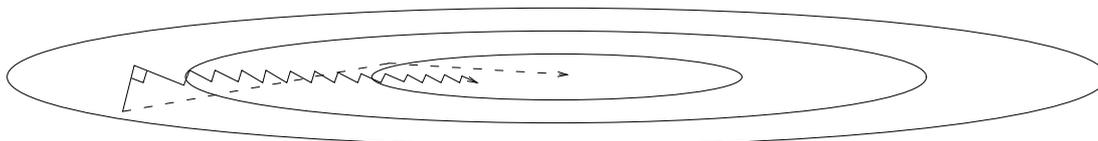


FIG. IV.3 - Comportement des méthodes de descente du premier ordre dans une région du critère caractérisée par un conditionnement médiocre de son hessien. En trait plein (—), méthode du gradient optimal, en tireté (---), méthode du gradient conjugué.

Toutefois, le coût de calcul de ces méthodes demeure très élevé puisqu'il fait appel au hessien du critère, ce qui, dans le cas que nous étudions, revient à stocker une matrice de $P \times P = 296^2$ points à chaque itération. De plus, le critère $J(\boldsymbol{\gamma})$ étant fortement éloigné d'un critère quadratique, l'approximation locale du hessien est susceptible de perdre de son efficacité si l'on cherche à rallonger les pas à chaque itération. Un compromis entre la précision des méthodes d'ordre 1 et l'efficacité des méthodes d'ordre 2 a été trouvé dans les méthodes de *gradient conjugué*, construites à l'origine pour résoudre les systèmes linéaires mal conditionnés. Si \mathbf{H} est le hessien du critère quadratique résultant, la méthode du gradient conjugué va conduire à des directions de descente successives orthogonales, non plus pour le produit scalaire canonique mais pour le produit scalaire $\langle \mathbf{H} \cdot, \cdot \rangle$. Les directions de descentes successives sont dès lors appelées *conjuguées* (*cf.* [Lascaux et Theodor 1987]). La direction de descente effective, qui n'est plus celle de plus grande pente, permet d'allonger considérablement la longueur de chaque pas de descente et de réduire ainsi d'autant le nombre de ces pas de sorte que si P est le nombre de variables du critère à minimiser, le minimum exact sera atteint en faisant appel à P calculs successifs du gradient du critère. Des extensions efficaces de cette méthode pour des critères non quadratiques ont été proposées par Fletcher et Reeves, puis Polak et Ribière (*cf.* [Press et coll. 1986]). Ces méthodes de gradient conjugué compensent l'absence de calcul du hessien du critère par une minimisation « de ligne » très précise dans chaque direction choisie (par appels successifs à des calculs du critère), de façon à garder la propriété de conjugaison.

Un premier défaut de ces algorithmes est qu'ils sont construits pour minimiser le nombre d'appels de calcul du gradient, comme si ce calcul était algorithmiquement beaucoup plus lourd que celui du critère. Ceci est loin d'être toujours vérifié, d'autant plus que ce dernier fait appel à des calculs partiels déjà effectués lors du calcul du critère au même point. Un second inconvénient est que ces méthodes de gradient conjugué cherchent à minimiser de manière très précise le long des directions de descente alors qu'une stratégie plus efficace, semble-t'il, consiste à ne pas « s'attarder » à minimiser précisément dans cette direction (*cf.* remarque IV.3) et à passer rapidement à une nouvelle direction, comme l'illustre la plus grande efficacité du gradient à pas adaptatif par rapport au gradient optimal. Algorithmiquement, on observe qu'un bon compromis consiste à effectuer un calcul du gradient pour 3 à 5 calculs du critère. Ceci nous a conduit à mettre en œuvre une version adaptative approchée du gradient conjugué, que nous appelons *gradient pseudo-conjugué* parce qu'à la condition de minimisation exacte dans la direction de descente, nécessaire pour garder la propriété locale de conjugaison, a été substituée une minimisation grossière effectuée en un petit nombre d'appels du critère (*cf.* [Brette et coll. 1997]).

Par ailleurs, à cause de la relative imprécision introduite dans la minimisation de ligne, la propriété de *conjugaison* entre les directions de minimisation successives, qui garantissait le caractère *descendant* des directions proposées, n'est plus rigoureusement vérifiée dans notre algorithme. Afin d'éviter que la correction proposée n'aboutisse à une direction *de montée*, nous introduisons un test d'angle entre la direction de plus grande pente et la direction pseudo-conjuguée proposée (selon les formules de Polak-Ribière). Si l'angle obtenu est en valeur absolue supérieur à 90 degrés, la direction proposée (alors montante) est refusée et on lui substitue la direction de plus grande pente. En pratique (*cf.* Figs. IV.5 et IV.6), cette méthode s'avère aussi efficace qu'un gradient conjugué exact pour un coût de calcul nettement moins élevé.

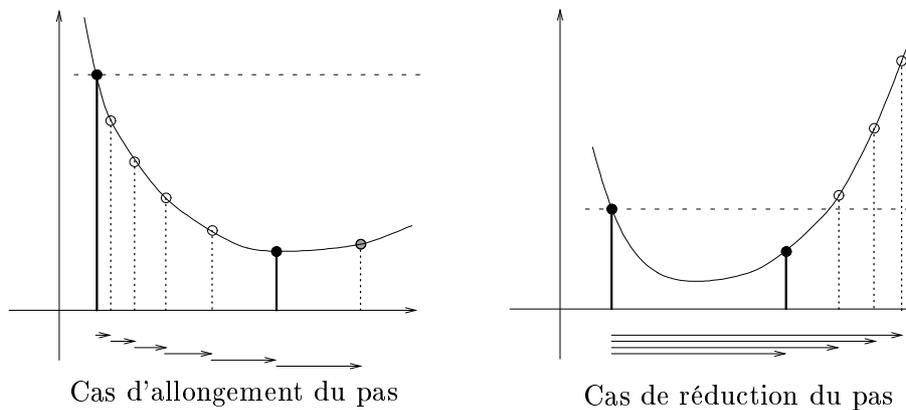


FIG. IV.4 - Illustration de la stratégie de minimisation de ligne adoptée. Si, avec le pas initial, le premier point calculé dans la direction de descente est situé sous la valeur initiale du critère, une stratégie d'allongement du pas (additive et multiplicative) est retenue. En revanche, si le premier point est situé au-dessus de cette valeur initiale, une stratégie (multiplicative) de réduction du pas est appliquée.

Récapitulatif IV.1 (Algorithme du gradient *pseudo-conjugué* (GPC)).

L'algorithme GPC que nous proposons se définit comme suit :

- Initialisation de γ_0 , $\gamma_1 = \gamma_0$;
- $k \leftarrow 0$, $\mu = \mu_0$;
- $\mathbf{g}_0 = \mathbf{grad}_{\gamma=\gamma_0} J$, $\mathbf{d}_0 = \mathbf{g}_0$;
- Tant que $\|\mathbf{g}_k\| > \epsilon$, faire :
 - $k \leftarrow k + 1$, $n \leftarrow 0$;
 - $\mathbf{g}_k = \mathbf{grad}_{\gamma=\gamma_k} J$;
 - $\gamma_k^0 = \gamma_k$;
 - Calcul de la direction de descente potentielle :

$$\mathbf{d}_k^{\text{pot}} = \rho_k \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{g}_k \quad (\text{IV.8})$$

avec (cf. Polak-Ribiere [Press et coll. 1986])

$$\rho_k = \frac{(\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})^t \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_k^t \mathbf{g}_k}. \quad (\text{IV.9})$$

- Si $\mathbf{g}_{k-1}^t \mathbf{d}_k^{\text{pot}} > 0$ (cf. [Brette et coll. 1997]), faire

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_k^{\text{pot}},$$

sinon, faire

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{g}_k.$$

Minimisation de ligne :

- $\gamma_k^1 = \gamma_k^0 - \mu \mathbf{d}_k$;
- Si $J(\gamma_k^1) < J(\gamma_k^0)$, faire
 - tant que $J(\gamma_k^n) < J(\gamma_k^{n-1})$, faire
 - $n \leftarrow n + 1$;
 - $\mu \leftarrow \alpha \mu$ avec $\alpha > 1$;
 - $\gamma_k^n = \gamma_k^{n-1} - \mu \mathbf{d}_k$.
 - $\gamma_{k+1} = \gamma_k^{n-1}$.
- Si $J(\gamma_k^1) > J(\gamma_k^0)$, faire
 - tant que $J(\gamma_k^1) > J(\gamma_k^0)$, faire
 - $\mu \leftarrow \beta \mu$ avec $\beta < 1$;
 - $\gamma_k^1 = \gamma_k^0 - \mu \mathbf{d}_k$.
 - $\gamma_{k+1} = \gamma_k^1$.

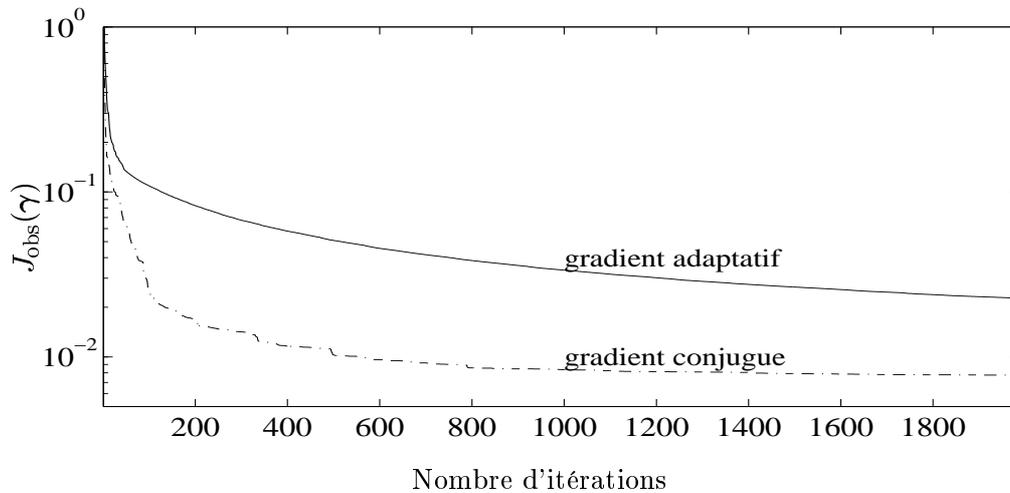


FIG. IV.5 - Efficacité comparée, lors de la minimisation du critère $J(\boldsymbol{\sigma})$, des algorithmes des méthodes de descente d'ordre 1 à pas adaptatif. En trait plein (—), évolution du critère avec le gradient à pas adaptatif (GPA); en traits mixtes (---), évolution de J_{obs} avec le gradient pseudo-conjugué (GPC). On remarque la nette supériorité du GPC, dès le début de la minimisation. On observe aussi, avec le GPC, que la minimisation s'effectue par paliers successifs de plus en plus prolongés au fur et à mesure des itérations. Ces deux observations confirment l'existence de régions du critère pour lesquelles l'approximation hessienne garde un conditionnement relativement médiocre.

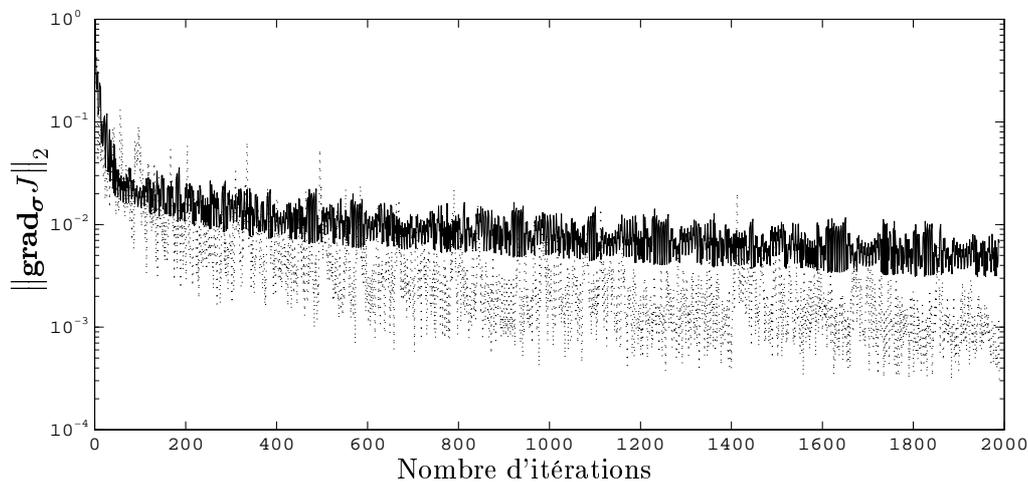


FIG. IV.6 - Comparaison des normes du gradient sur le même exemple que celui de la figure précédente. En trait plein (—), GPA; en pointillés (:), GPC. Le test d'arrêt choisi étant un seuil sur la norme du gradient au point considéré, la condition $\|\text{grad}_{\boldsymbol{\sigma}} J\|_2 < 2.10^{-4}$ est vérifiée pour le GPC en moins de 2000 itérations alors qu'il en faut plus de 20000 avec le GPA. Ainsi, la pseudo-conjugaison permet d'obtenir une précision algorithmique proche de celle des méthodes du second ordre pour le coût d'une méthode du premier ordre.

Remarque IV.3 (Stratégie de minimisation de ligne).

La stratégie de minimisation de ligne que nous présentons dans le récapitulatif IV.1 est relativement grossière (*cf.* Fig. IV.4). On trouve dans la littérature (*cf.* [Press et coll. 1986] et [Lascaux et Theodor 1987]) des méthodes de minimisation de ligne reposant sur des approximations polynômiales (le plus souvent quadratiques ou cubiques) du critère le long de la direction descente. Toutefois, ces approximations ne fonctionnent guère efficacement pour minimiser le présent critère, en particulier à cause de sa non convexité. Nous préférons ici une méthode de recherche un peu plus systématique dans la direction de descente, avec, dans le cas où le *pas* courant μ s'avère trop petit au départ (*cf.* Fig. IV.4), une stratégie d'allongement à la fois additive et multiplicative. En pratique, on observe que les directions *pseudo-conjuguées* proposées par l'algorithme sont très fréquemment acceptées (plus de 9 fois sur 10). Ceci atteste donc que la stratégie de minimisation de ligne obtenue réalise un bon compromis simplicité/efficacité.

3.3 Résultats des simulations MAP

Nous présentons ici les résultats obtenus par simulation numérique. Les calculs ont été effectués sur une station de travail HP 9000, avec le logiciel *Matlab 4.2*

Comme de nombreux auteurs (*e.g.*, [Hua et coll. 1991]), nous initialisons notre algorithme de minimisation par un γ_0 uniforme (ici, nous prenons $\gamma_0 = \mathbf{0}$). On peut envisager d'automatiser ce choix en commençant la minimisation avec $\gamma_0 = \gamma_0 \mathbf{1}$, où γ_0 minimise la fonction

$$j(\gamma) = \sum_{k=1}^K \frac{\left\| \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\text{exp}\{\gamma \mathbf{1}\}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k \right\|^2}{2s_k^2}.$$

Le terme de régularisation disparaît puisque $J_{\text{apr}}(\gamma \mathbf{1}) = 0$. Ceci correspondrait à la valeur de conductivité moyenne uniforme la plus proche des données observées. Si on note

$$\mathbf{M} := \bar{\mathbf{P}}_n \Theta^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D}$$

où, rappelons le, $\Theta = \mathbf{A}_{\sigma=\mathbf{1}}$, alors un simple calcul de dérivée donne :

$$\gamma_0 = \ln \left[\left(\sum_{k=1}^K \frac{\bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^t \mathbf{M}^t \mathbf{M} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}}{s_k^2} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^K \frac{\bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^t \mathbf{M}^t \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}}{s_k^2} \right) \right].$$

Une éventuelle valeur complexe de γ_0 révélerait des observations très incohérentes, *i.e.*, un RSB beaucoup trop bas pour que les mesures soient utilisables en TIÉ.

Nous présentons ici les résultats obtenus avec cinq termes *d'a priori* différents : le premier est obtenu sans terme de régularisation (*cf.* Figs. IV.8.b et IV.9.b) ; le second avec une régularisation Gauss-Markov sur σ (*cf.* Figs. IV.8.c et IV.9.c), comme suggéré dans [Hua et coll. 1991] ; le troisième avec un terme *d'a priori* Huber-Markov sur σ (*cf.* Figs. IV.8.d et IV.9.d) ; le quatrième avec une régularisation Gauss-Markov sur γ (*cf.* Figs. IV.8.e et IV.9.e) ; le cinquième avec un terme *d'a priori* Huber-Markov sur γ (*cf.* Figs. IV.8.f et IV.9.f). Dans les deux cas où nous utilisons le terme *d'a priori* Huber-Markov, Nous avons choisi pour le seuil τ une valeur très petite de façon à avoir une

régularisation quasi- \mathcal{L}_1 . Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre I § 3.5, pour tous les cas régularisés, nous choisissons l'hyperparamètre λ « au jugé » de façon à obtenir qualitativement la meilleure estimation possible.

Afin d'essayer de quantifier la qualité des reconstructions, nous calculons la distance \mathcal{L}_1 séparant la distribution de conductivité estimée $\hat{\gamma}$ de l'original γ . Cette norme passe en effet pour avoir une assez bonne adéquation avec l'appréciation visuelle. Plus précisément, nous utilisons la mesure de distance suivante :

$$\delta_1(\gamma, \hat{\gamma}) = \frac{\|\gamma - \hat{\gamma}\|_1}{\|\gamma\|_1} \quad (\text{IV.10})$$

où $\gamma, \hat{\gamma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les distributions caractérisées par les vecteurs γ et $\hat{\gamma}$. L'introduction de cette mesure nous permet en particulier d'illustrer quantitativement ce qu'on observe qualitativement en choisissant les hyperparamètres « au jugé » : la qualité des estimées n'est réellement sensible à la variation des hyperparamètres que pour des variations de l'ordre d'un facteur d'échelle (cf. Fig. IV.7). L'autre difficulté lors de la mise en œuvre algorithmique consiste à choisir le seuil de la norme du gradient correspondant au test d'arrêt. Il s'agit de trouver le seuil en-deçà duquel les améliorations fournies par une prolongation de la minimisation seront minimales. En pratique, ce seuil idéal dépend des hyperparamètres de sorte que son choix est opéré de pair avec celui de λ .

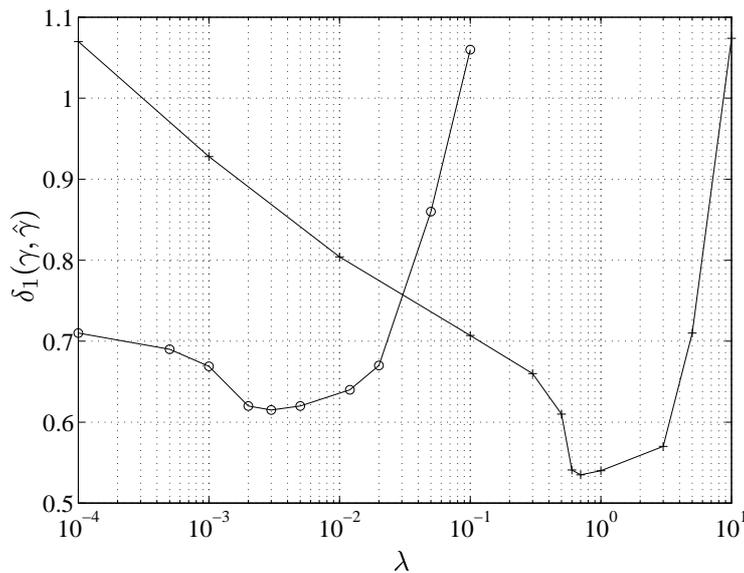
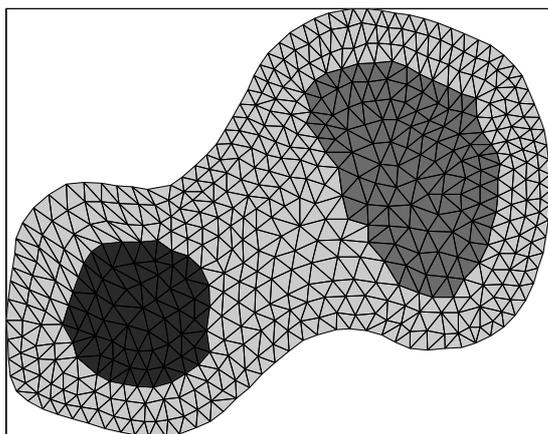
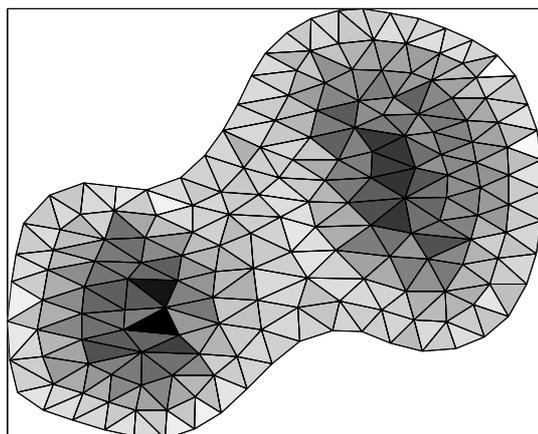


FIG. IV.7 - Évolution de l'écart à l'original en fonction de l'hyperparamètre λ , pour une régularisation Gauss-Markov (\circ) et Huber-Markov ($+$) sur γ , avec un RSB de 40 dB. Les variations de ces courbes sont en concordance avec l'appréciation visuelle comparée des estimateurs (en particulier, les minima de chaque courbe semblent bien correspondre aux meilleures reconstructions obtenues en faisant varier λ). On remarquera les plages de faible sensibilité de $\delta_1(\gamma, \hat{\gamma})$ en fonction de λ autour du minimum, avec cependant une plus grande robustesse dans le cas Gauss-Markov que dans le cas Huber-Markov.



a - Distribution de conductivité originale.



b - Reconstruction sans régularisation.

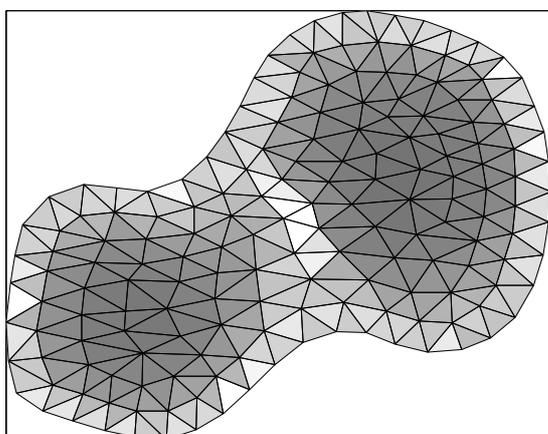
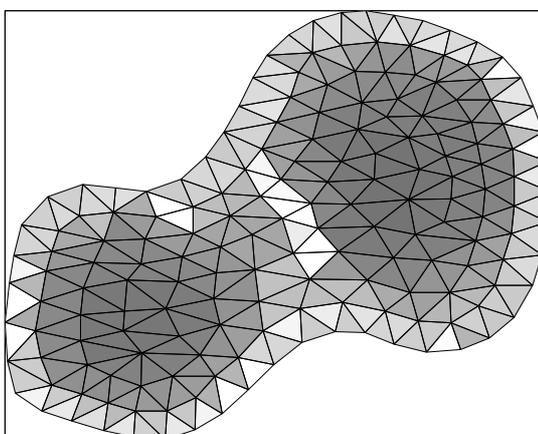
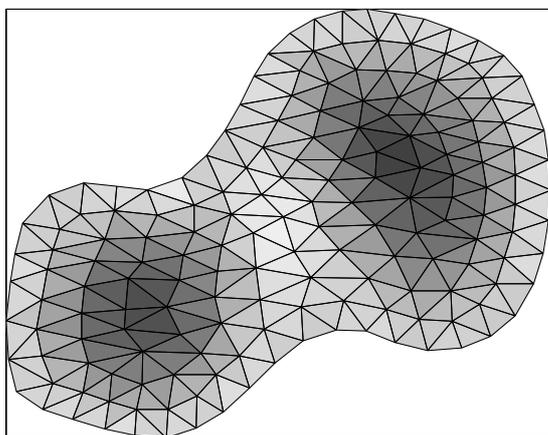
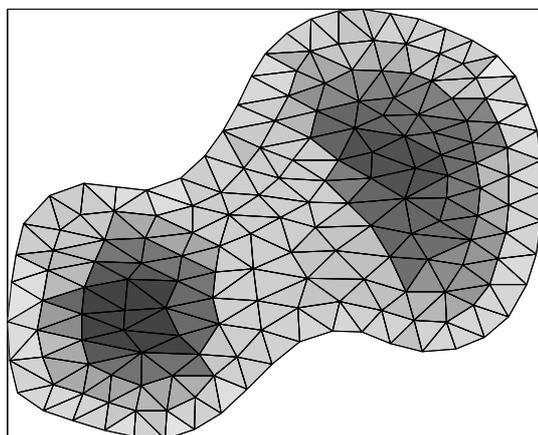
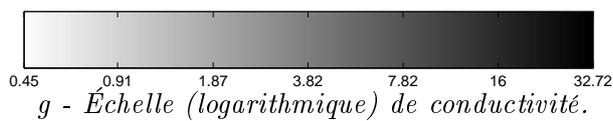
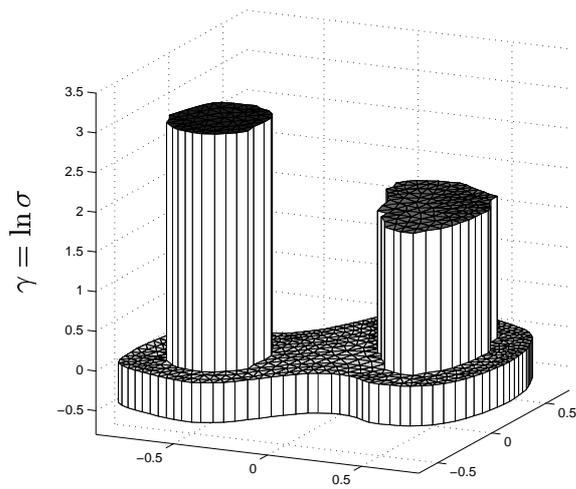
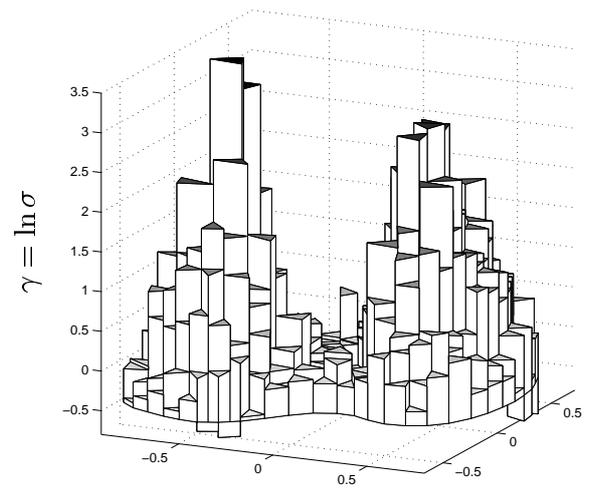
c - Reconstruction Gauss-Markov sur σ .d - Reconstruction Huber-Markov sur σ .e - Reconstruction Gauss-Markov sur γ .f - Reconstruction Huber-Markov sur γ .

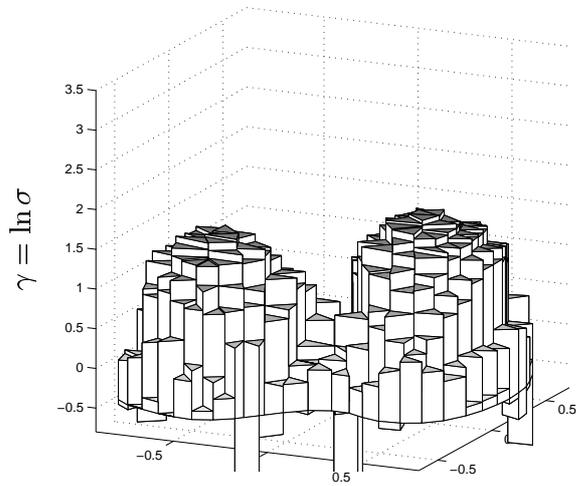
FIG. IV.8 - Reconstructions MAP en TIÉ (RSB de 40 dB).



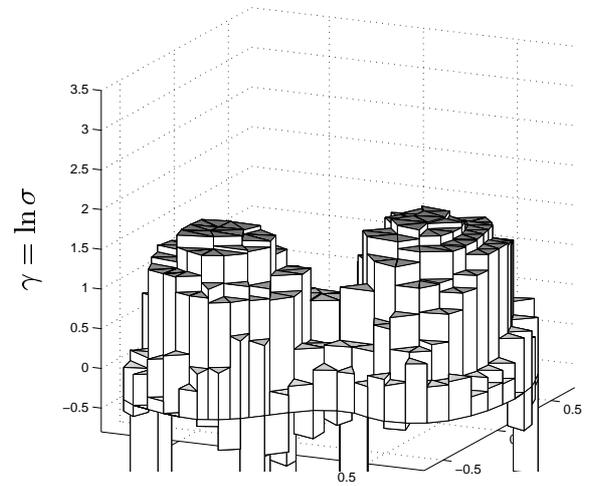
a - Distribution de log-conductivité originale.



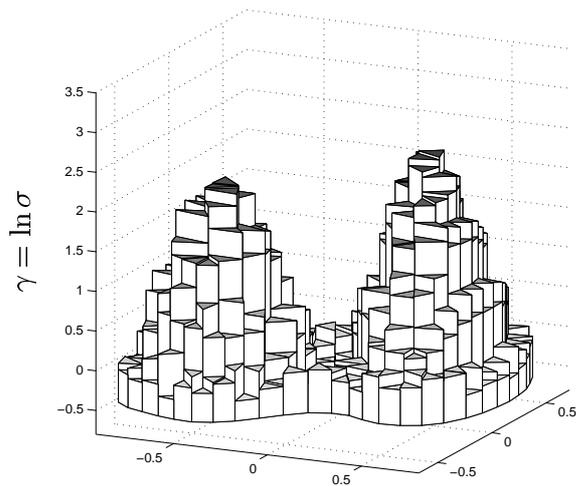
b - Reconstruction sans régularisation.



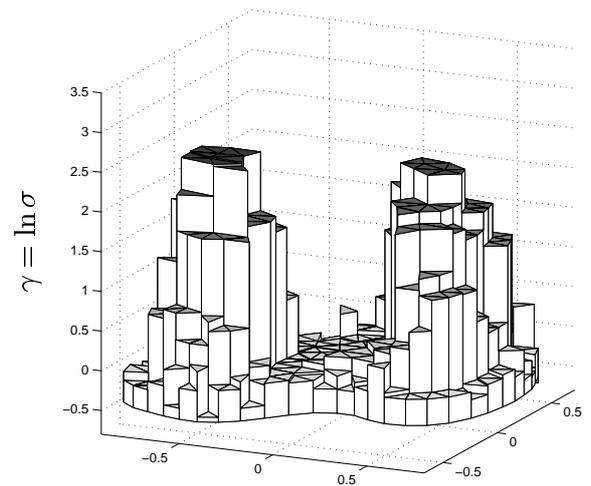
c - Reconstruction Gauss-Markov sur σ .



d - Reconstruction Huber-Markov sur σ .



e - Reconstruction Gauss-Markov sur γ .



f - Reconstruction Huber-Markov sur γ .

FIG. IV.9 - Profil 3D des reconstructions MAP en TIÉ (RSB de 40 dB).

| régularisation | λ | τ | $\delta_1(\gamma, \hat{\gamma})$ | temps d'exécution |
|---------------------------|-----------|-----------|----------------------------------|-------------------|
| aucune | 0 | ∞ | 1.06 | 4035 s |
| Gauss-Markov sur σ | 0.035 | ∞ | 0.88 | 832 s |
| Huber-Markov sur σ | 0.6 | 10^{-5} | 0.99 | 2546 s |
| Gauss-Markov sur γ | 0.003 | ∞ | 0.615 | 244 s |
| Huber-Markov sur γ | 0.7 | 10^{-5} | 0.53 | 1415 s |

TAB. IV.1 - Comparaison des écarts $\delta_1(\gamma, \hat{\gamma})$ entre la distribution originale γ et la distribution estimée $\hat{\gamma}$, pour différentes méthodes de régularisation. La paramétrisation en γ et l'utilisation d'une régularisation quasi- \mathcal{L}_1 permettent de diminuer cet écart de manière significative.

Les résultats font clairement valoir l'apport de la régularisation en γ puisque seul ce type de régularisation permet de reconstruire des contrastes comparables à celui de la distribution originale. Le choix entre l'*a priori* gaussien et l'*a priori* quasi- \mathcal{L}_1 peut être envisagé comme un compromis entre la rapidité d'optimisation pour le premier et la qualité de reconstruction pour le second. On peut remarquer le temps de calcul très élevé de la méthode non régularisée. Ceci est dû à un choix, pour la condition d'arrêt, d'un seuil plus faible sur la norme du gradient. Au vu d'un certain nombre de simulations, on peut faire les trois constatations suivantes :

- Dans le cas de l'estimation non régularisée, on observe que, plus on diminue le seuil du test d'arrêt, plus la qualité de la reconstruction se dégrade (qualité perçue aussi bien visuellement qu'avec $\delta_1(\gamma, \hat{\gamma})$). La figure IV.8.b est donc qualitativement meilleure que la reconstruction «MAP» exacte correspondante. En effet, il est connu qu'une minimisation très peu précise dans le cas non régularisé possède des effets régularisants, pouvant laisser croire, si le seuil est mal choisi, que les propriétés du MAP non régularisé ne sont pas si mauvaises dans ce cas ;

- Dans le cas de l'estimation régularisée en σ , on constate que la diminution du seuil du test d'arrêt finit par engendrer une très lente dégradation de la qualité de reconstruction. Cela peut s'interpréter comme une conséquence du caractère non nul sur leur borne inférieure (*i.e.*, $\mathbf{0}$) des densités *a priori* Gauss-Markov et Huber-Markov sur σ . Ainsi, si ces densités *a priori* ne sont pas *impropres*, elles n'en demeurent pas moins inadaptées à la régularisation pour une variable positive telle que σ . On remarque en particulier l'incapacité à reconstruire les zones de conductivité de haut contraste (qui se traduit par un caractère excessivement « homogène » des deux régions conductrices) et une tendance à sous régulariser pour les conductivités très faibles (voire à favoriser l'émergence de composantes de conductivité négatives). Ce dernier point explique en particulier la moins bonne qualité de la reconstruction avec régularisation quasi- \mathcal{L}_1 vis-à-vis de la régularisation gaussienne en σ . Tout ceci justifie qu'on qualifie ces méthodes de *stabilisantes* plutôt que *régularisantes* ;

- Dans le cas de l'estimation régularisée en γ , il semble que la diminution du seuil

du test d'arrêt amène systématiquement une meilleure estimation (tout au moins lorsque l'hyperparamètre λ est proche de l'optimal décrit Fig. IV.7). Les figures IV.8.e et IV.8.f demeurent donc qualitativement en-deçà de l'exacte estimation MAP correspondante. Enfin, un avantage non négligeable des méthodes de régularisation en γ réside également dans leur plus grande rapidité de convergence.

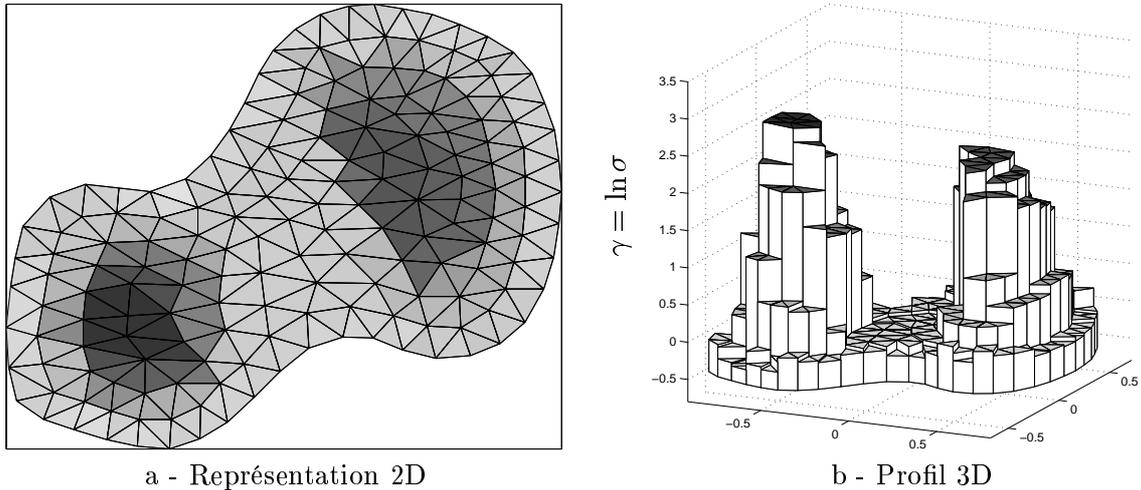


FIG. IV.10 - *Reconstruction Huber-Markov sur γ (RSB de 60 dB). On obtient, pour l'écart à l'original, $\delta_1(\gamma, \hat{\gamma}) = 0.47$.*

À titre de comparaison, nous présentons (*cf.* Fig. IV.10) les reconstructions Huber-Markov sur γ obtenues avec un RSB de 60 dB. Comme l'atteste la valeur de l'écart à l'original ($\delta_1(\gamma, \hat{\gamma}) = 0.47$), les résultats obtenus sont meilleurs qu'à 40 dB. Toutefois, cette amélioration, obtenue pour un coût algorithmique 3 fois supérieur, n'est pas qualitativement très significative. Ceci peut s'expliquer en partie parce qu'à 60 dB, on s'approche des limites de précision du modèle direct (dont on a estimé l'erreur de discrétisation entre 50 et 70 dB au chapitre III).

Il semble enfin que le caractère multimodal du critère $J(\gamma)$ demeure assez peu prononcé puisqu'en pratique, on obtient des résultats qualitativement très proches en faisant varier l'initialisation γ_0 .

4 Conclusion

Nous proposons ici une méthode d'estimation de type MAP en TIÉ, qui préserve la non linéarité de la dépendance des observations vis-à-vis de la conductivité grâce à l'utilisation de la MÉF. Pour cela, nous introduisons une densité *a priori* de type Huber-Markov, non plus sur la conductivité mais la log-conductivité. Sur le plan algorithmique, la détermination du MAP est opérée avec une méthode du type gradient conjugué, conçue de façon à pouvoir optimiser, avec un coût de calcul réduit, un critère pouvant conserver localement des approximation hessiennes dont les conditionnements demeurent élevées.

Cette méthode, qui a été mise en œuvre sur des jeux d'observations simulés avec un maillage « haute résolution », fournit des estimées sur un maillage de résolution intermédiaire. Les résultats obtenus attestent des améliorations à plusieurs niveaux :

- La méthode permet de reconstruire des distributions de conductivité fort contrastées (dans notre exemple, le contraste vaut 20) ;
- La méthode s'avère robuste pour un RSB de 40 dB, ce qui constitue un gain de plus de 25 dB par rapport à la méthode non linéaire de [Hua et coll. 1991]. De plus, la qualité de reconstruction est très peu sensible au point d'initialisation de l'algorithme ;
- Le temps de calcul de la méthode est réduit, surtout lorsqu'on utilise une loi *a priori* Gauss-Markov ;
- L'utilisation de la loi *a priori* Huber-Markov permet de préserver le caractère éventuellement discontinu de la distribution de conductivité à estimer.

5 Annexe : calcul du gradient du critère MAP

Nous présentons ici le calcul du gradient du critère (IV.5), dont nous rappelons l'expression :

$$J(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k=1}^K \frac{\|\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{t}}_{\text{obs}}^k\|^2}{2s_k^2} + \frac{\lambda}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{q \in v(p)} \phi_{\tau}(\gamma_p - \gamma_q),$$

où $\boldsymbol{\gamma} = g(\boldsymbol{\sigma}) = \ln \boldsymbol{\sigma}$. Posons

$$J_{\text{obs}}^k = \frac{\|\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{t}}_{\text{obs}}^k\|^2}{2s_k^2}.$$

Alors

$$\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\gamma}} J_{\text{obs}}^k = \mathbf{J}_{g^{-1}(\boldsymbol{\gamma})} \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\sigma}} J_{\text{obs}}^k,$$

où $\mathbf{J}_{g^{-1}(\boldsymbol{\gamma})}$, le jacobien de g^{-1} , s'écrit :

$$\mathbf{J}_{g^{-1}} = \text{Diag}(\exp \boldsymbol{\gamma}) = \text{Diag}(\boldsymbol{\sigma}),$$

expression dans laquelle $\text{Diag}(\mathbf{u})$ désigne la matrice diagonale contenant les éléments de \mathbf{u} sur la diagonale. On a donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{\text{obs}}^k}{\partial \sigma_p} &= \frac{2}{2s_k^2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma_p} (\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k) \right]^t (\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k) \\ &= -\frac{1}{s_k^2} \left[\bar{\mathbf{P}}_n \frac{\partial \mathbf{A}_{\sigma}^{-1}}{\partial \sigma_p} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k \right]^t (\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k).\end{aligned}$$

Or, pour l'inverse d'une matrice, on a la règle de dérivation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial t} = -\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \mathbf{M}^{-1}.$$

Sachant d'autre part que

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\sigma}}{\partial \sigma_p} = \mathbf{Q}^t \frac{\partial [\Delta_{\sigma}]_4}{\partial \sigma_p} \mathbf{Q} =: \Theta_p$$

est une matrice qui ne dépend pas de σ (elle ne dépend que de la structure géométrique du maillage contenue dans \mathbf{Q}) d'une part et qui est très creuse (en particulier, elle est aisément stockable) d'autre part, on obtient

$$\frac{\partial J_{\text{obs}}^k}{\partial \sigma_p} = \frac{1}{s_k^2} (\bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma}^{-1} \Theta_p \mathbf{A}_{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k)^t (\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k).$$

Par ailleurs, on a pour le terme de régularisation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{\text{apr}}^k}{\partial \gamma_p} &= \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^P \sum_{q \in v(l)} \frac{\partial}{\partial \gamma_p} \phi_{\tau}(\gamma_l - \gamma_q), \\ &= \frac{\lambda}{2} \sum_{q \in v(p)} \phi'_{\tau}(\gamma_p - \gamma_q) - \frac{\lambda}{2} \sum_{l \in v(p)} \phi'_{\tau}(\gamma_l - \gamma_p) \\ &= \lambda \sum_{q \in v(p)} \phi'_{\tau}(\gamma_p - \gamma_q) \text{ car } \phi'_{\tau} \text{ est impaire.}\end{aligned}$$

L'expression composante par composante du gradient de $J(\gamma)$ est donc la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \gamma_p} &= \sum_{k=1}^K \frac{e^{\gamma_p}}{s_k^2} (\bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\text{exp } \gamma}^{-1} \Theta_p \mathbf{A}_{\text{exp } \gamma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k)^t (\bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{A}_{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}_{\text{obs}}^k) \\ &\quad + \lambda \sum_{q \in v(p)} \phi'_{\tau}(\gamma_p - \gamma_q). \quad (\text{IV.11})\end{aligned}$$

ÉCHANTILLONNAGE STOCHASTIQUE ET BILINÉARITÉ

1 Introduction

CE CHAPITRE présente une étude plus prospective en vue de proposer un algorithme d'échantillonnage stochastique de type MCMC pour l'estimation de la log-conductivité en TIÉ. Trois raisons principales motivent cette étude :

- Partant d'abord du caractère non linéaire du modèle direct choisi, on remarque la nature spécifique de cette non linéarité : moyennant quelques manipulations à partir de l'éq. (III.40), le modèle direct peut être vu comme une *équation bilinéaire sous contrainte bilinéaire*. Il semble donc intéressant de pouvoir exploiter cette propriété pour construire une méthode d'estimation spécifique ;
- Ensuite, pour des problèmes inverses *bilinéaires* tels que la *déconvolution myope* (où non seulement l'entrée mais aussi l'opérateur de convolution est inconnu), des méthodes d'estimation bayésiennes (à base d'échantillonneurs de Gibbs) peuvent être mises en œuvre de façon particulièrement simple ;
- Enfin, en raison du coût de calcul élevé requis lors de la modélisation de problèmes inverses non linéaires, les méthodes d'échantillonnage stochastiques ont été très peu utilisées pour les résoudre. Pour le problème d'imagerie à ondes diffractées, une mise en œuvre du recuit simulé a été effectuée par [Garnero et coll. 1991]. En TIÉ, dans [Fox et Nicholls 1997], les auteurs utilisent un échantillonneur de Métropolis pour reconstruire une carte binaire de conductivité. Toutefois, la non linéarité aboutit à ce que le voisinage *a posteriori* d'un pixel à échantillonner s'étend à l'ensemble des sites si bien qu'en pratique, ces méthodes sont rendues inutilisables à cause de leur coût de calcul prohibitif. La méthode que nous essayons de construire ici est destinée à être implantée sous la forme d'un algorithme « rapide » car, en conjuguant le caractère *extrêmement creux* de la matrice de rigidité \mathbf{A}_σ du problème et la bilinéarité du modèle, elle permet de construire, sans approximation, une méthode d'échantillonnage à voisinage *a posteriori* très réduit.

Dans un premier temps, nous présentons donc ce cadre de méthodes d'échantillonnages pour des problèmes bilinéaires. Ensuite, nous essayons d'appliquer ces propriétés au problème inverse de TIÉ en introduisant le caractère contraint du modèle direct bilinéaire dans la construction d'un algorithme MCMC spécifique. Tout au long du chapitre, nous

nous appuyons sur un exemple simple à deux variables pour illustrer les difficultés et le comportement attendu de la méthode.

2 Résolution bayésienne de problèmes inverses bilinéaires

Considérons le problème décrit par le modèle de convolution suivant :

$$\mathbf{y}_{\text{obs}} = \mathbf{h} * \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (\text{V.1})$$

où \mathbf{y}_{obs} désigne les observations, \mathbf{x} est l'objet recherché, \mathbf{h} désigne l'ondelette convoluante et \mathbf{b} représente l'incertitude du modèle. La détermination de l'objet \mathbf{x} lorsque \mathbf{h} est connue correspond à la résolution d'un problème inverse dont le modèle direct est linéaire (il existe de nombreuses méthodes désormais « classiques » pour les résoudre). En revanche, lorsque l'ondelette \mathbf{h} est inconnue ou mal connue, la détermination conjointe de l'objet et de l'ondelette est un problème inverse bilinéaire. Pour la résolution de ce type de problème, l'utilisation de lois *a priori* est absolument essentielle pour lever des indéterminations telles que le signe de \mathbf{h} et \mathbf{x} , leur puissance, voire leur phase.

Les études sur ce type de problème sont encore peu nombreuses. Mentionnons les travaux de [Gautier et coll. 1997] pour la déconvolution aveugle d'échogrammes ultrasonores. Les auteurs introduisent une loi *a priori* séparable gaussienne généralisée pour retrouver le caractère impulsionnel de l'objet \mathbf{x} (une séquence de réflectivité) et une loi Gauss-Markov pour favoriser la douceur sur l'ondelette \mathbf{h} . L'estimateur MAP revient alors à minimiser un critère de la forme suivante :

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} [\|\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{h} * \mathbf{x}\|^2 + \lambda \sum_i |x_i|^p + \mu \mathbf{h}^t \mathbf{Q} \mathbf{h}], \quad p > 1.$$

On remarque alors que le critère est convexe en \mathbf{x} à \mathbf{h} fixé et réciproquement. Les auteurs exploitent donc cette *biconvexité* du critère pour le minimiser *alternativement* en \mathbf{x} et en \mathbf{h} . Néanmoins, le critère n'étant pas convexe, cette méthode de minimisation est *sous-optimale* dans le sens où elle ne garantit la convergence que vers un minimum local ou un point selle du critère. En effet, en tant que méthodes d'optimisation déterministes (*cf.* chapitre I § 3.2.2), les méthodes de minimisation alternées ne possèdent pas de propriétés de convergence globale.

Cette difficulté disparaît avec l'utilisation des algorithmes d'échantillonnage stochastiques (MCMC). L'*échantillonneur de Gibbs*, que nous présentons maintenant, va nous permettre en particulier de continuer à manipuler \mathbf{x} et \mathbf{h} de manière alternée.

2.1 L'échantillonneur de Gibbs (EG)

Considérons pour cela une loi à échantillonner, caractérisée par sa densité de probabilité $p(\mathbf{x}) = f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$ sur Λ . La plupart des descriptions de la littérature sont effectuées dans le cas où Λ contient un nombre fini d'états discrets [Geman et Geman 1984], [Winkler 1995]. Nous donnons ici une présentation du résultat « étendue » à un espace Λ continu. Toutefois, si les noyaux de transition que nous présentons ici sous la forme de *densités* s'avèrent ponctuellement infinies, il est préférable d'introduire l'échantillonneur de Gibbs à partir de distributions (*cf.* [Chib et Greenberg 1994]).

En conservant les notations introduites au chapitre I § 3.4.2, nous notons $\Sigma := \{s_1, \dots, s_{N_x}\}$ l'ensemble des sites (ou pixels) à échantillonner. L'EG consiste à effectuer des tirages successifs selon des probabilités conditionnelles qui sont à supports réduits par rapport à Σ et que l'on sait échantillonner alors que l'on ne sait pas faire un tirage global de la loi f . L'idée sous-jacente consiste à construire une chaîne de Markov dont l'état stationnaire est la loi à échantillonner. Pour cela, on a besoin d'une stratégie de balayage des sites.

Définition V.1 (Stratégie de balayage).

On appelle *stratégie de balayage* $S = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_M\}$ toute énumération de supports Σ_m tels que l'ensemble des supports décrits contienne tous les sites : $\Sigma = \cup_{m=1}^M \Sigma_m$.

En particulier, il n'est pas nécessaire que le recouvrement défini à partir de la réunion des supports soit une partition de l'ensemble des sites. Le tirage sur chaque support Σ_m va alors être effectué selon un noyau de transition local.

Définition V.2 (Noyau de transition local).

Le noyau de transition local de \mathbf{x} à \mathbf{y} , noté $\pi_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, est la densité en \mathbf{y} définie par :

$$\pi_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} p(\mathbf{y}_{\Sigma_m} | \mathbf{y}_{\Sigma \setminus \Sigma_m}) & \text{si } \mathbf{y}_{\Sigma \setminus \Sigma_m} = \mathbf{x}_{\Sigma \setminus \Sigma_m} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

Le noyau de transition local est donc la densité de probabilité de transition de l'état \mathbf{x} à l'état \mathbf{y} , définie à partir de la *caractéristique locale* $p(\mathbf{y}_{\Sigma_m} | \mathbf{y}_{\Sigma \setminus \Sigma_m})$. Il n'autorise donc que des changements sur le support local Σ_m . Dès lors, si le changement de \mathbf{x} à \mathbf{z} nécessite l'utilisation de deux supports m et n , un noyau de transition de \mathbf{x} à \mathbf{z} peut s'écrire comme une composition des deux noyaux

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int_{\Lambda} \pi_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \pi_n(\mathbf{y}, \mathbf{z}) d\mathbf{y},$$

ce qui correspond à deux tirages successifs à partir des caractéristiques locales associées à π_m et π_n : un tirage $\pi_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ suivi d'un tirage $\pi_n(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Nous pouvons alors donner la définition suivante.

Définition V.3 (Noyau de Markov [Winkler 1995]).

Le *noyau de Markov pour la densité* $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$, noté π_S , est le noyau de transition (global) défini à partir de la stratégie de balayage S :

$$\pi_S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int \pi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \dots \int \pi_{M-1}(\mathbf{y}_{M-2}, \mathbf{y}_{M-1}) \pi_M(\mathbf{y}_{M-1}, \mathbf{z}) d\mathbf{y}_{M-1} \dots d\mathbf{y}_1, \quad (\text{V.3})$$

où les π_m sont les noyaux de transitions locaux définis à partir des caractéristiques locales de $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$.

La mise à jour de tous les sites selon le noyau de Markov π_S est appelée *balayage*. Ensuite, pour que l'algorithme converge, il suffit comme l'indique le théorème suivant (cf. [Geman et Geman 1984], [Winkler 1995]), d'itérer les balayages.

Théorème V.1 (Convergence de l'échantillonneur de Gibbs).

Posons :

$$\pi_S^n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int_{\Lambda} \pi_S^{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \pi_S(\mathbf{y}, \mathbf{z}) d\mathbf{y}, \quad (\text{V.4})$$

où π_S est un noyau de Markov pour la densité $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ défini à partir de la stratégie de balayage S . Alors, pour tout $\mathbf{x} \in \Lambda$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \pi_S^n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{y} = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}). \quad (\text{V.5})$$

uniformément pour toute densité de probabilité initiale $g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$.

Dans le cas qui nous intéresse (éq. (V.1)), le vecteur à échantillonner est la concaténation des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{h} . En particulier, si la loi (*a posteriori*) à échantillonner s'écrit

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{h} \mid \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta) \propto \exp -J(\mathbf{x}, \mathbf{h})$$

avec

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} [\|\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{h} * \mathbf{x}\|^2 + \lambda \mathbf{x}^t \mathbf{R} \mathbf{x} + \mu \mathbf{h}^t \mathbf{Q} \mathbf{h}].$$

Alors, avec la règle de Bayes, on obtient

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, \mathbf{h} \mid \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta) &= p(\mathbf{x} \mid \mathbf{h}, \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta) p(\mathbf{h} \mid \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta) \\ &= p(\mathbf{h} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta) p(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta), \end{aligned}$$

d'où il apparaît que les densités conditionnelles $p(\mathbf{x} \mid \mathbf{h}, \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta)$ et $p(\mathbf{h} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta)$ sont toutes les deux gaussiennes (on sait donc les échantillonner directement). La stratégie de balayage à deux supports $S = \{\Sigma_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{h}}\}$ est donc parfaitement envisageable pour échantillonner la loi $p(\mathbf{x}, \mathbf{h} \mid \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta)$ avec l'EG. Toutefois, d'autres stratégies de balayages peuvent être utilisées, telles que des stratégies de visite *site par site*. En effet, si l'on note \mathbf{x}_p le vecteur contenant tous les x_i excepté le p -ième, il apparaît que la caractéristique locale $p(x_p \mid \mathbf{x}_p, \mathbf{h}, \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta)$ est également gaussienne de même que $p(h_q \mid \mathbf{h}_q, \mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{obs}}; \theta)$. En particulier, l'ordre de balayage des sites n'intervient pas dans la démonstration de convergence de l'EG. On peut donc alterner des tirages en x_p et en h_q ou encore ([Winkler 1995]) choisir une stratégie de balayage aléatoire. Tout au plus, le choix d'une stratégie de balayage influe sur la vitesse de convergence de l'algorithme.

2.2 Illustration par un exemple à deux variables

Pour illustrer le comportement de l'EG, nous prenons un exemple simple bidimensionnel dans lequel la densité $f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}(x, h)$ est définie par

$$f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}(x, h) = \frac{1}{Z} \exp -J(x, h) \quad (\text{V.6})$$

où le critère $J(x, h)$ s'écrit

$$J(x, h) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(y_{\text{obs}} - hx)^2}{s^2} + \frac{x^2}{s_x^2} + \frac{h^2}{s_h^2} \right\}, \quad (\text{V.7})$$

que nous particularisons avec les valeurs suivantes : $s = 50$, $s_x = 10$, $s_y = 10$ et $y_{\text{obs}} = 100$. Le problème possède donc une symétrie impaire par rapport aux axes (Ox) et (Oy) (cf. Fig. V.1). Cette symétrie correspond à une indétermination du signe sur x et h , que ni les observations ni les termes de régularisation choisis ici ne contribuent à lever.

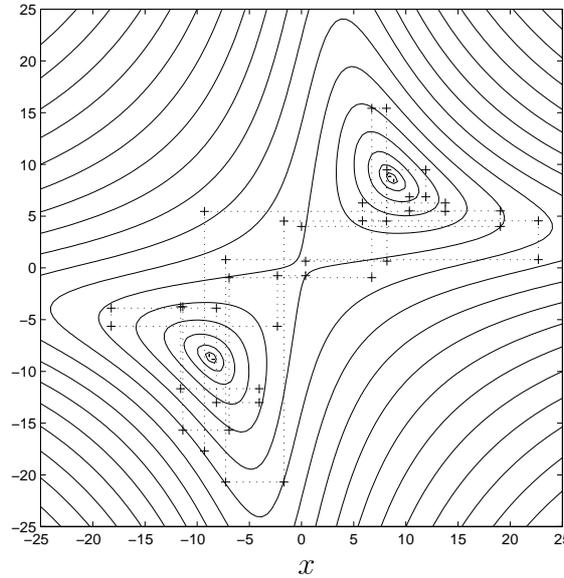


FIG. V.1 - Allure du critère $J(x, h)$ correspondant à la distribution bivariable à échantillonner. Lors des tirages successifs – marqués ici par des (+) – effectués avec l'échantillonneur de Gibbs, le déplacement s'effectue en alternance, soit horizontalement (tirage des x), soit verticalement (tirage des h). En effet, chaque coupe horizontale ou verticale du graphique correspond à un critère quadratique, i.e., une distribution (conditionnelle) gaussienne. (Les lignes de niveaux représentées ici ne sont pas linéairement espacées.)

La distribution $f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}(x, h)$ se révèle bimodale (cf. Fig V.1). Pour trouver les formules correspondant au tirage en x , il suffit d'écrire $f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}(x, h) = f_{(x|\mathcal{H})}(x|h)f_{\mathcal{H}}(h)$ et d'identifier la gaussienne correspondant à $f_{(x|\mathcal{H})}(x|h)$, ce qui donne

$$m_x = \left[\frac{1}{s_x^2} + \frac{h^2}{s^2} \right]^{-1} \left[\frac{y_{\text{obs}} h}{s^2} \right] \quad (\text{V.8})$$

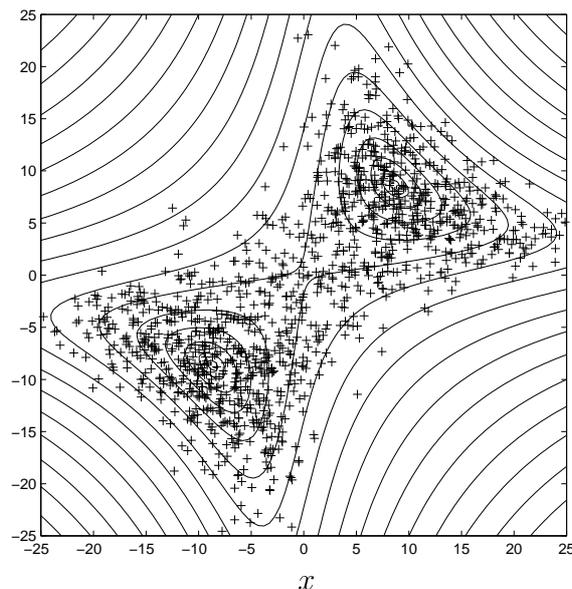


FIG. V.2 - Nuage de points échantillonnés après $L = 1300$ balayages par EG (seul le dernier point de chaque balayage est affiché). On observe que le nuage se densifie autour des deux modes.

pour la moyenne du tirage de x et

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{1}{s_x^2} + \frac{h^2}{s^2} \right]^{-1} \quad (\text{V.9})$$

pour sa variance. Le problème étant symétrique en x et h , il suffit d'invertir ces deux variables pour obtenir la moyenne et la variance de h . L'échantillonnage de Gibbs est alors obtenu en alternant les tirages de x à h fixé et réciproquement. On observe que sa mise en œuvre respecte le caractère bimodal de la distribution $f_{(x, \mathcal{H})}(x, h)$, (cf. Fig. V.2). Une estimation de la moyenne *a posteriori* (MP) $E[|\mathcal{X}| | \mathcal{Y} = y_{\text{obs}}]$, opérée « rapidement » en moyennant toutes les réalisations x_l et h_l aboutit ici à au couple $(0, 0)$, qui ne représente pas du tout l'objet recherché. En fait, étant donné l'indétermination sur les signes de x et h , il faut ramener tout à un quadrant et calculer :

$$|x|_{\text{MP}} = \frac{1}{L - L_0} \sum_{l=L_0}^L |x_l|$$

et

$$|h|_{\text{MP}} = \frac{1}{L - L_0} \sum_{l=L_0}^L |h_l|$$

qui sont les estimateurs pertinents des espérances $E[|\mathcal{X}| | \mathcal{Y} = y_{\text{obs}}]$ et $E[|\mathcal{H}| | \mathcal{Y} = y_{\text{obs}}]$ et où l'entier $L_0 < L$ signifie que l'on attend que la chaîne de Markov ait atteint un état stationnaire avant de comptabiliser les échantillons dans l'estimation.

Dans [Cheng et coll. 1996], les auteurs utilisent ainsi un échantillonneur de Gibbs en déconvolution aveugle (avec un modèle gaussien sur l'ondelette et un modèle bernoulli-gaussien sur la réflectivité). En outre, ils étendent le principe d'alternance entre \mathbf{x} et \mathbf{h} à

l'estimation de la variance des observations s^2 de loi conditionnelle χ^{-2} , ce qui aboutit à une méthode d'estimation bayésienne « totale » dans le sens où les hyperparamètres eux-mêmes sont estimés dans la méthode. En fait, les méthodes stochastiques alternées sont particulièrement intéressantes pour des problèmes *multilinéaires* ou, de manière générale, pour des problèmes dont la densité *a posteriori* fait apparaître des densités conditionnelles échantillonnables de manière simple.

3 Échantillonnage bilinéaire sous contrainte

Dans ce paragraphe, nous essayons de voir comment les méthodes d'échantillonnage bilinéaire peuvent s'étendre lorsqu'une contrainte d'égalité, elle-même bilinéaire, s'ajoute au problème. Pour cela, nous commençons par montrer que le problème de TIÉ peut s'écrire sous une forme *bilinéaire contrainte*.

3.1 Problème de TIÉ vu sous forme bilinéaire contrainte

Le caractère *bilinéaire contraint* que nous établissons ici n'est pas une spécificité de la TIÉ. Ainsi, en tomographie de diffraction, le problème revêt exactement la même propriété, qui se présente sous une *formulation jointe* du problème ([Carfantan 1996]). Dans la remarque II.2, nous soulignons l'aspect bilinéaire de l'application

$$(\sigma, \vec{E}) \mapsto \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Il est immédiat de voir que le caractère contraint intervient à partir du moment où \vec{j} et \vec{E} sont fixés, ce qui est le cas, pour le problème inverse, le long de la frontière Ω .

Pour construire le modèle bilinéaire des observations, nous partons de l'équation (III.37), prise avec $v_{ref} = 0$:

$$\mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} = \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{v}}. \quad (\text{V.10})$$

Le modèle direct (restreint) de l'équation (III.40) est établi en résolvant ce système linéaire (et en ne retenant que les \bar{N} composantes frontalières de \mathbf{v}). Pour simplifier l'écriture, posons

$$\mathbf{j} := \bar{\mathbf{P}}_n^t \mathbf{D} \bar{\mathbf{v}}. \quad (\text{V.11})$$

Puisque \mathbf{A}_σ est une matrice dépendant linéairement de σ , l'équation

$$\mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} = \mathbf{j} \quad (\text{V.12})$$

est *bilinéaire* en (σ, \mathbf{v}) . Par conséquent, il existe une matrice \mathbf{M}_v , de taille $N \times P$, telle que cette équation s'écrit

$$\mathbf{M}_v \sigma = \mathbf{j}. \quad (\text{V.13})$$

Nous montrons en annexe (cf. § 6.1) qu'il existe un tableau ξ de taille $P \times N \times N$, extrêmement creux et dépendant des seules caractéristiques géométriques du maillage Ω_h , tel que

$$(\mathbf{M}_v)_{np} = \sum_{i=1}^N \xi(p, n, i) v_i. \quad (\text{V.14})$$

Pour construire une méthode d'estimation tirant parti de la bilinéarité, il est tentant de proposer l'équation d'observation suivante :

$$\mathbf{M}_v \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} = \mathbf{j}_{\text{obs}} + \mathbf{b},$$

où \mathbf{b} représente l'incertitude, que l'on peut modéliser par une loi gaussienne comme pour le modèle d'observation utilisé pour le MAP par l'équation (IV.2). En effet, l'idée sous-jacente consiste à mettre en œuvre un EG dans lequel on alternerait des tirages selon les deux lois conditionnelles $p(\boldsymbol{\sigma} | \mathbf{v})$ et $p(\mathbf{v} | \boldsymbol{\sigma})$, toutes deux gaussiennes.

Malheureusement, une telle proposition omet de prendre en compte le fait qu'une partie du vecteur de tension est observée (donc fixée), ce qui va induire une contrainte lors de l'inversion. En outre, le vecteur \mathbf{j} , de longueur N , ne possède pas uniquement des composantes observées (à une transformation par \mathbf{D} près), ce qui va induire une seconde contrainte. Essayons de donner une écriture plus détaillée de cette double contrainte en posant (quitte à réordonner les colonnes de \mathbf{A}_σ) :

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathring{\mathbf{v}} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.15})$$

De même, (quitte à réordonner les lignes de \mathbf{A}_σ), on peut poser

$$\mathbf{j} := \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{j}} \\ \mathring{\mathbf{j}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{j}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.16})$$

puisque la matrice $\bar{\mathbf{P}}_n$ est un opérateur de projection sur la frontière, (on a donc en particulier $\bar{\mathbf{j}} = \mathbf{D}\bar{\mathbf{v}}$) si bien que l'équation (V.10) s'écrit :

$$\mathbf{A}_\sigma \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathring{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{j}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{V.17})$$

$$\text{soit encore } \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\sigma^{11} & \mathbf{A}_\sigma^{12} \\ \mathbf{A}_\sigma^{21} & \mathbf{A}_\sigma^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathring{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{j}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.18})$$

en partitionnant la matrice de rigidité \mathbf{A}_σ . Remarquons que, puisque \mathbf{A}_σ est régulière, les matrices carrées \mathbf{A}_σ^{11} et \mathbf{A}_σ^{22} le sont aussi. De plus, comme \mathbf{A}_σ est symétrique, on a $(\mathbf{A}_\sigma^{12})^t = \mathbf{A}_\sigma^{21}$. De même, on peut partitionner la matrice \mathbf{M}_v de façon à écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_v^1 \\ \mathbf{M}_v^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{j}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.19})$$

où \mathbf{M}_v^1 est de taille $\bar{N} \times P$ et \mathbf{M}_v^2 est de taille $(N - \bar{N}) \times P$. Puisque $\bar{\mathbf{v}}$ est une grandeur observée, l'inconnue du problème se limite au couple $(\boldsymbol{\sigma}, \mathring{\mathbf{v}})$. Nous aboutissons donc au

modèle joint d'observations qui suit, pour K jeux d'observations :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{M}_{\mathbf{v}^k}^1 \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k + \bar{\mathbf{b}}^k, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{s.c. } \mathbf{M}_{\mathbf{v}^k}^2 \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \text{et s.c. } \bar{\mathbf{v}}^k = \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k, \end{array}} \quad (\text{V.20})$$

qui s'exprime aussi sous la forme

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{11} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{12} \bar{\mathbf{v}}^k = \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k + \bar{\mathbf{b}}^k, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{s.c. } \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{21} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{22} \bar{\mathbf{v}}^k = \mathbf{0}. \end{array}} \quad (\text{V.21})$$

On remarque que la contrainte $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{21} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{22} \bar{\mathbf{v}}^k = \mathbf{0}$, qui correspond à l'équation $\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k}^2 \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, est elle-même bilinéaire en $(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\mathbf{v}})$. Enfin, notons qu'il faut ajouter à ces expressions la contrainte d'espace $\boldsymbol{\sigma} > \mathbf{0}$, où le signe $>$ désigne ici une comparaison valable composante par composante. À partir de là, une première solution va consister à « accepter » la contrainte et à éliminer $\bar{\mathbf{v}}$: on revient alors au modèle direct (III.40) utilisé au chapitre précédent, sans possibilité d'utiliser la bilinéarité. Une seconde approche, destinée à utiliser cette dernière, consiste au contraire à *relaxer* la contrainte. Pour voir en quoi cela consiste, nous reprenons l'exemple à deux variables étudié précédemment.

3.2 Exemple bivarié de relaxation d'une contrainte bilinéaire

Le modèle d'observation aboutissant au critère (V.7) s'écrit :

$$y_{\text{obs}} = hx + b_1, \quad b_1 \sim \mathcal{N}(0, s^2). \quad (\text{V.22})$$

Nous lui ajoutons ici une contrainte bilinéaire du type

$$z = (h - h_0)(x - x_0). \quad (\text{V.23})$$

La relaxation de cette contrainte consiste à introduire (momentanément) une variable aléatoire b_2 tel que

$$z = (h - h_0)(x - x_0) + b_2 \quad b_2 \sim \mathcal{N}(0, Ts^2), \quad (\text{V.24})$$

où la *température* T désigne en quelque sorte le « degré de liberté » avec lequel on relaxe la contrainte. On obtient alors un modèle d'observations, reposant sur les équations (V.22) et (V.24), qui est totalement bilinéaire. Par conséquent, le critère correspondant à la nouvelle loi s'écrit :

$$J_T(x, h) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{[y_{\text{obs}} - hx]^2}{s^2} + \frac{[z - (h - h_0)(x - x_0)]^2}{Ts^2} + \frac{x^2}{s_x^2} + \frac{h^2}{s_h^2} \right\}, \quad (\text{V.25})$$

loi que l'on peut échantillonner aisément avec l'EG. En opérant de même que dans l'exemple non contraint, on obtient :

$$m_x = \left[\frac{1}{s_x^2} + \frac{h^2}{s^2} + \frac{(h - h_0)^2}{Ts^2} \right]^{-1} \left[\frac{y_{\text{obs}} h}{s^2} + \frac{(h - h_0)(z + x_0(h - h_0))}{Ts^2} \right] \quad (\text{V.26})$$

pour la moyenne du tirage de x et

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{1}{s_x^2} + \frac{h^2}{s^2} + \frac{(h - h_0)^2}{Ts^2} \right]^{-1} \quad (\text{V.27})$$

pour sa variance (de nouveau pour le tirage de h , il suffit d'invertir x et h).

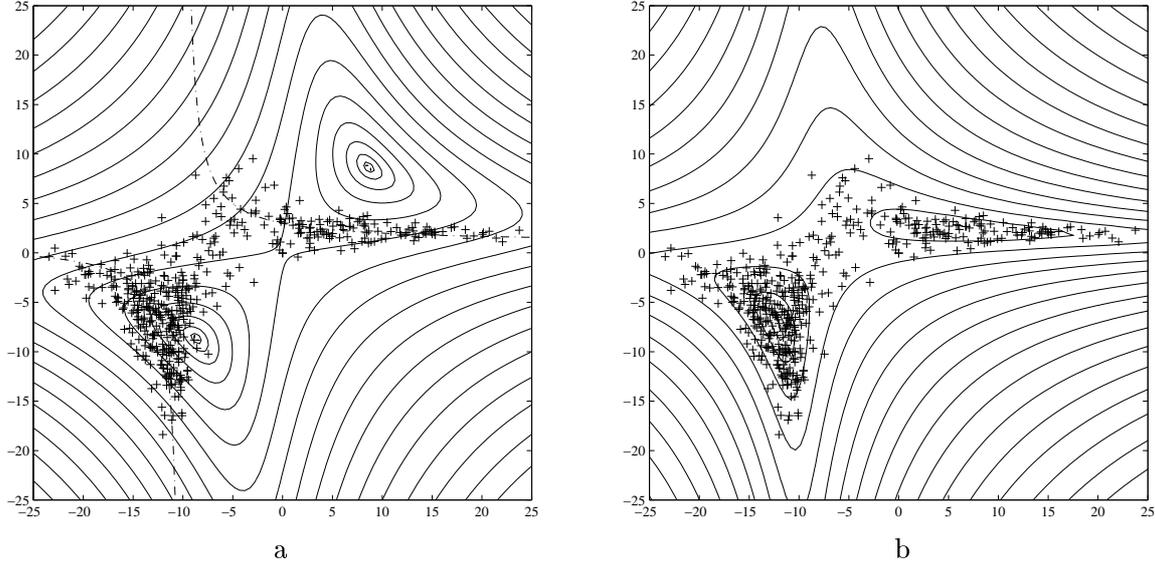


FIG. V.3 - Nuage de points échantillonnés après $L = 500$ balayages par EG, avec une contrainte bilinéaire (tracée en trait mixte $- \cdot -$) pour $T = 0,1$. Les courbes de niveaux représentées sur la figure a sont les mêmes qu'au § 2.2 et ne prennent donc pas en compte le terme de relaxation $[z - (h - h_0)(x - x_0)]^2 / (Ts^2)$. Le critère complet $J_T(x, h)$, avec le même nuage, est représenté sur la figure b.

Nous reprenons dans cet exemple les mêmes valeurs de paramètres que précédemment, en ajoutant $z = 20$, $x_0 = -10$ et $h_0 = 1$. Le choix de la température est essentiellement un compromis entre la fidélité à la contrainte ($T \rightarrow 0$) et la capacité à parcourir celle-ci en un nombre restreint de balayage ($T \rightarrow \infty$). Dans notre exemple, avec une valeur $T = 0,1$, on obtient un assez bon compromis apparent (*cf.* Fig. V.3). Avec $T = 0,01$, on obtient une relaxation trop faible (*cf.* Fig. V.4 a) tandis que pour $T = 1$, celle-ci commence à être trop élevée (*cf.* Fig. V.4 b).

Par ailleurs, on observe le caractère désormais asymétrique du critère contraint. L'interprétation de cette asymétrie, ainsi qu'une éventuelle levée du caractère ambigu qu'elle occasionne, dépend de l'interprétation propre au problème considéré. Ainsi, en TIÉ où l'on dispose d'une contrainte d'espace $\sigma > 0$, l'ensemble des tirages $\sigma_p \leq 0$ sont rejetés. Toutefois, un moyennage des tirages obtenus ne correspond pas à la moyenne effectivement recherchée puisque les points échantillonnés ne se situent pas rigoureusement sur la contrainte. Une correction est envisageable avec l'échantillonnage pondéré.

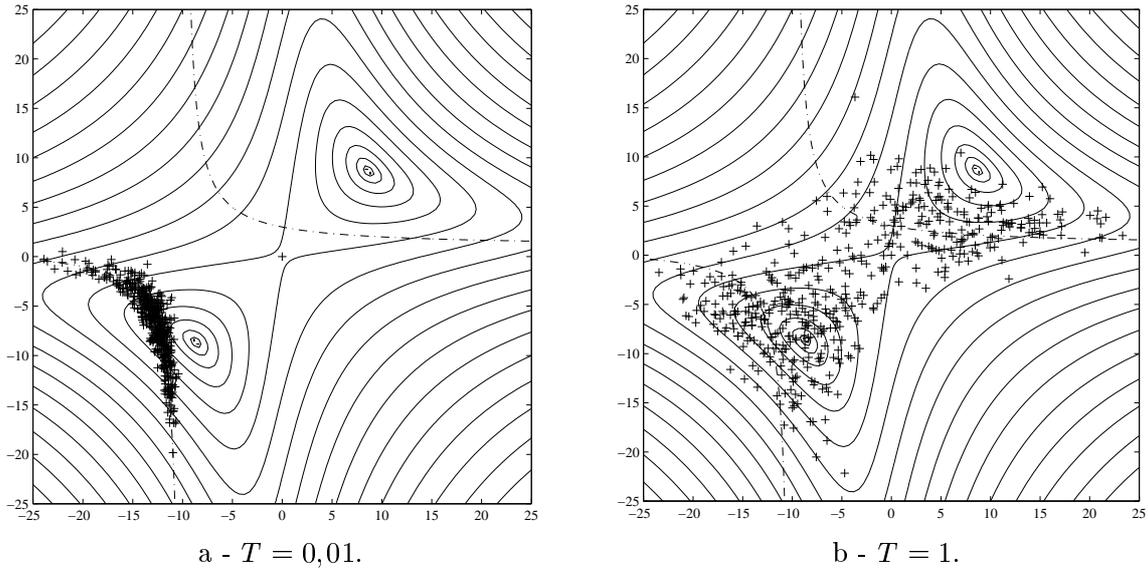


FIG. V.4 - Nuage de 500 points échantillonnés avec une température a: $T = 0,01$ et b: $T = 1$. On observe en a grande fidélité à la contrainte, mais le pas de déplacement est trop petit pour permettre facilement le passage d'un mode à l'autre pour un nombre restreint de balayage. En revanche, en b, la température est trop élevée pour représenter la contrainte avec fidélité.

3.3 Principe de l'échantillonnage pondéré

L'échantillonnage pondéré, encore appelé *méthode de Monte Carlo de fonction d'importance* (de l'anglais « importance sampling »), est utilisé pour estimer l'espérance d'une fonction $g(\mathbf{x})$ sous une loi de densité $p(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ que l'on ne sait pas échantillonner directement. L'idée sous jacente, mentionnée dans [Robert 1992], consiste à exploiter le fait qu'il est souvent plus aisé de calculer une densité que de l'échantillonner. Supposons que nous sachions échantillonner selon une loi $\phi(\mathbf{x})$ (appelée fonction d'importance), alors l'espérance de $g(\mathbf{x})$ s'écrit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p[g(\mathbf{x})] &= \int_{\Lambda} g(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Lambda} g(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
 &= \frac{\int_{\Lambda} g(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{\int_{\Lambda} \frac{p(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}} \\
 &= \frac{\mathbb{E}_{\phi}\left[g(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})}\right]}{\mathbb{E}_{\phi}\left[\frac{p(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})}\right]}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L\}$ est une suite de points échantillonnés selon ϕ (e.g., par EG), on peut estimer l'espérance de g sous la loi p par

$$g^{\text{MP}} = \frac{\sum_{l=L_0}^L \omega(\mathbf{x}_l) g(\mathbf{x}_l)}{\sum_{l=L_0}^L \omega(\mathbf{x}_l)} \quad (\text{V.28})$$

où $\omega(\mathbf{x}_l)$, *coefficient de pondération* (cf. Fig. V.7), est défini à partir de

$$\omega(\mathbf{x}) := \frac{p(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})}. \quad (\text{V.29})$$

La vitesse de la convergence de cette méthode est étroitement liée au choix de la fonction ϕ - plus ϕ est proche de p , plus rapide est la convergence de la moyenne. On remarquera par ailleurs que la connaissance des constantes de normalisation des lois p et ϕ n'est pas nécessaire puisque leur rapport, qui apparaît aussi bien au numérateur qu'au dénominateur de l'équation (V.28), se simplifie.

3.4 Résultats de l'échantillonnage pondéré pour l'exemple bivariable

Nous pouvons appliquer cette règle à l'exemple précédent. Nous disposons d'une densité bilinéaire échantillonnable $f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}^T(x, h) = \exp[-J_T(x, h)]/Z_T$. Par ailleurs, nous cherchons à estimer la moyenne de la loi $f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}(x, h)$, prise sur la contrainte $h = z/(x - x_0) + h_0$ (cf. éq. (V.23)), loi que l'on renomme

$$p(x) = f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}(x, \frac{z}{(x - x_0)} + h_0) = \frac{1}{Z_p} \exp -J_p(x), \quad (\text{V.30})$$

avec

$$J_p(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{[y_{\text{obs}} - x(z/(x - x_0) + h_0)]^2}{s^2} + \frac{x^2}{s_x^2} + \frac{(z/(x - x_0) + h_0)^2}{s_h^2} \right\}. \quad (\text{V.31})$$

On remarque (cf. Fig. V.5) le caractère bimodal de cette densité, qui s'annule pour $x = x_0$.

Or, nous disposons de couples (x_l, h_l) obtenus par échantillonnage de $f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}^T(x, h)$. Par conséquent, si nous ne retenons que les x_l , ceux-ci correspondent à un échantillonnage sous la densité *marginale* en x :

$$f_{\mathcal{X}}^T(x) = \int f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}^T(x, h) dh. \quad (\text{V.32})$$

Nous pouvons obtenir une expression explicite de cette densité (toujours à une constante de normalisation près). En effet, $f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}^T(x, h) = f_{(\mathcal{H}|\mathcal{X})}^T(h|x) f_{\mathcal{X}}^T(x)$ avec une densité conditionnelle $f_{(\mathcal{H}|\mathcal{X})}^T(h|x)$ gaussienne, donc aisément identifiable. Nous nous contentons ici de

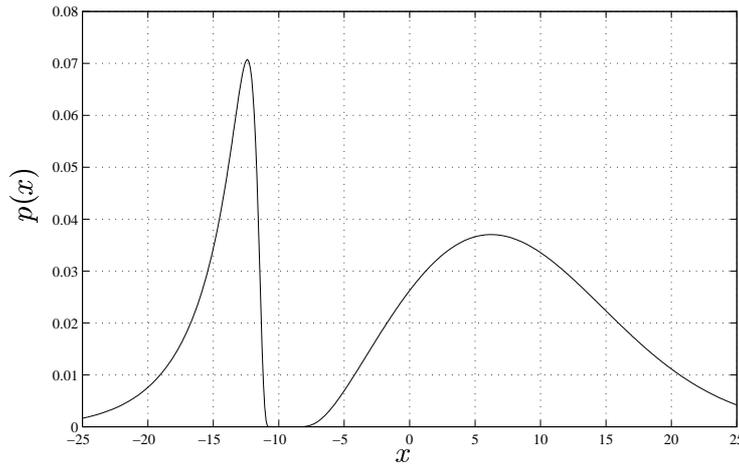


FIG. V.5 - Densité de probabilité $p(x)$ correspondant à $f_{(\mathcal{X}, \mathcal{H})}(x, h)$ prise sur la contrainte $h = z/(x - x_0) + h_0$. C'est cette distribution dont on cherche l'espérance. La constante de normalisation a été calculée numériquement.

fournir une expression de $f_{\mathcal{X}}^T(x)$ – l'ensemble des calculs permettant de l'obtenir est simple mais assez long. Posons

$$\frac{1}{\epsilon_T^2} := \frac{x^2}{s^2} + \frac{(x - x_0)^2}{T s^2} + \frac{1}{s_h^2} \quad (\text{V.33})$$

$$\text{et } \frac{\mu_T}{\epsilon_T^2} := \frac{x y_{\text{obs}}}{s^2} + \frac{(x - x_0)(z + h_0(x - x_0))}{T s^2} \quad (\text{V.34})$$

où $\mu_T(x)$ et $\epsilon_T(x)^2$ sont respectivement la moyenne et la variance de la gaussienne à identifier. Alors, en posant

$$I_T(x) := \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\mu_T^2}{\epsilon_T(x)^2} + \frac{y_{\text{obs}}^2}{s^2} + \frac{[z + h_0(x - x_0)]^2}{T s^2} + \frac{x^2}{s_x^2} \right\}, \quad (\text{V.35})$$

on obtient la densité

$$f_{\mathcal{X}}^T(x) = \frac{\sqrt{2\pi\epsilon_T(x)^2}}{Z_T} \exp -I(x) \quad (\text{V.36})$$

qui est représenté sur la figure V.6 pour plusieurs valeurs de T .

L'estimation de la moyenne se ramène donc, avec l'échantillonnage pondéré, à calculer

$$x_L^{\text{MP}} = \frac{\sum_{l=L_0}^L x_l \frac{p(x_l)}{f_{\mathcal{X}}^T(x_l)}}{\sum_{l=L_0}^L \frac{p(x_l)}{f_{\mathcal{X}}^T(x_l)}}, \quad (\text{V.37})$$

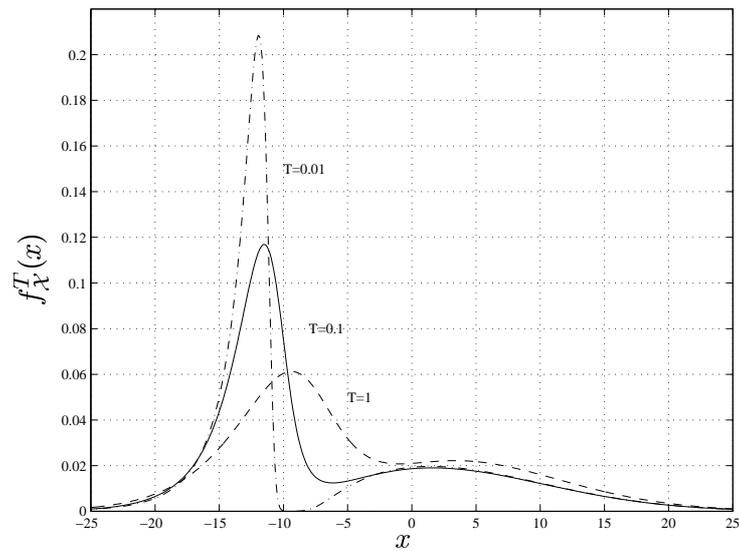


FIG. V.6 - Densités $f_{\lambda}^T(x)$ correspondant à la loi marginale en x de $f_{(x,h)}^T(x, h)$, que l'on sait échantillonner, pour les températures $T = 1$, $T = 0,1$ et $T = 0,01$. Il faut remarquer que la limite de cette loi, lorsque $T \rightarrow 0$, n'est pas la loi jointe contrainte $p(x)$ (cf. la remarque V.1), même si son allure s'en rapproche. Comme pour $p(x)$, les constantes de normalisation ont été calculées numériquement.

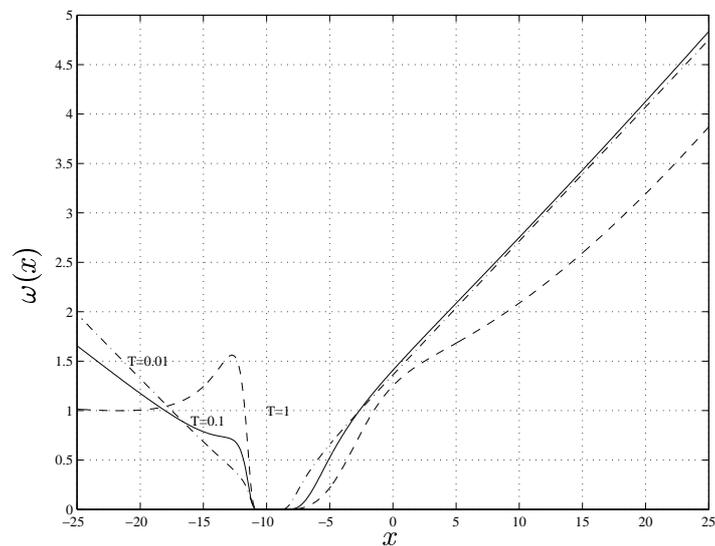


FIG. V.7 - Fonction de pondération $\omega(x) = p(x)/f_{\lambda}^T(x)$ pour différentes températures. On observe que pour $T \rightarrow 0$, ω devient proportionnel à $|x - x_0|$ conformément au résultat rapporté dans la remarque V.1.

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=L_0}^L x_l \frac{Z_T}{Z_p} \sqrt{2\pi\epsilon_T(x_l)^2} \exp\{-J_p(x_l) + I_T(x_l)\} \\
&= \frac{\sum_{l=L_0}^L x_l \frac{Z_T}{Z_p} \sqrt{2\pi\epsilon_T(x_l)^2} \exp\{-J_p(x_l) + I_T(x_l)\}}{\sum_{l=L_0}^L \frac{Z_T}{Z_p} \sqrt{2\pi\epsilon_T(x_l)^2} \exp\{-J_p(x_l) + I_T(x_l)\}}, \tag{V.38}
\end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu de la simplification des constantes de normalisation,

$$\boxed{x_L^{\text{MP}} = \frac{\sum_{l=L_0}^L x_l \sqrt{2\pi\epsilon_T(x_l)^2} \exp\{-J_p(x_l) + I_T(x_l)\}}{\sum_{l=L_0}^L \sqrt{2\pi\epsilon_T(x_l)^2} \exp\{-J_p(x_l) + I_T(x_l)\}}.} \tag{V.39}$$

Remarque V.1 (Limite de la densité $f_{\mathcal{X}}^T(x)$ lorsque $T \rightarrow 0$).

On pourrait s'attendre à ce que la densité marginale

$$f_{\mathcal{X}}^0(x) = \lim_{T \rightarrow 0} f_{\mathcal{X}}^T(x)$$

tende vers la loi contrainte $p(x)$, puisqu'alors « toute la masse de probabilité » se concentre vers la contrainte. En fait, il n'en est rien. Un calcul faisant appel à un développement limité permet en effet d'établir que cette densité, si elle existe, s'écrit

$$f_{\mathcal{X}}^0(x) = \left[\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sqrt{T}}{Z_T} \right] \frac{s\sqrt{2\pi} \exp -J_p(x)}{|x - x_0|}, \tag{V.40}$$

qui se distingue de $p(x)$ par le dénominateur en $|x - x_0|$. Par ailleurs, on peut voir qu'il n'existe pas une seule manière de relaxer la contrainte. Par exemple, à la place du terme $[z - (h - h_0)(x - x_0)]/Ts^2$, on aurait pu choisir $[z/(x - x_0) - (h - h_0)]/Ts^2$ qui, s'il n'est pas bilinéaire, va néanmoins engendrer une accumulation de densité autour de la contrainte lorsque $T \rightarrow 0$.

L'étude des résultats obtenus par simulation fait clairement apparaître l'efficacité de l'échantillonnage pondéré. La figure V.8 montre la convergence de la moyenne pondérée vers l'espérance de la loi $p(x)$ (il s'agit ici de l'espérance globale mais on peut tout aussi bien, à partir des échantillons tirés, estimer les espérances correspondant à chacun des modes de $p(x)$).

Cette constatation effectuée sur une *trajectoire* de 2000 balayages est confirmée par une étude statistique sur un grand nombre de trajectoires ($M = 200$). (*cf.* Fig. V.9). Nous calculons pour cela les moyennes empiriques instantanées (*i.e.*, au stade du l -ième échantillon) des moyennes estimées

$$\bar{x}_{lM} := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_{lm}^{\text{MP}}$$

où x_{lm}^{MP} désigne l'estimation courante de la moyenne x_l^{MP} , pour la m -ième trajectoire, sur $l - L_0$ points ($l = L_0, \dots, L$). Nous calculons également les écarts-types empiriques instantanés des moyennes estimées qui sont définis par

$$\sigma_{lM}^x = \frac{\sqrt{\sum_{m=1}^M (x_{lm}^{\text{MP}} - \bar{x}_{lM})^2}}{\sqrt{M-1}}. \quad (\text{V.41})$$

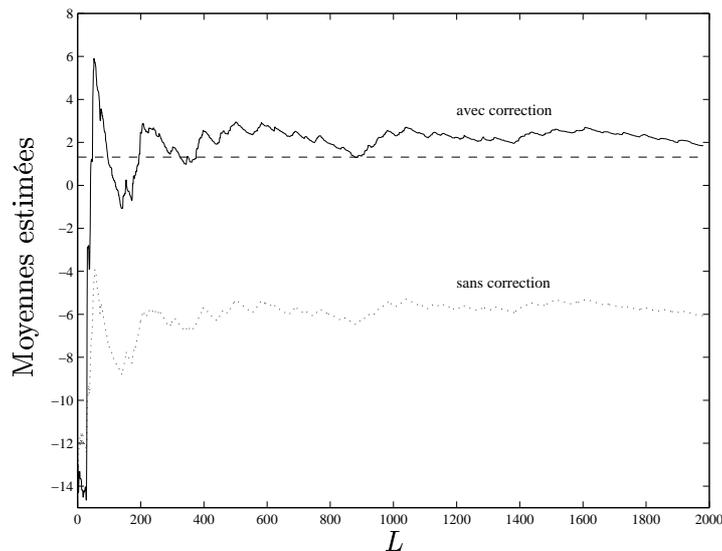


FIG. V.8 - Évolution de l'estimée de la MP de $p(x)$ au cours de l'échantillonnage pondéré ($T = 0,1$) et ($L_0 = 20$). En tireté (—), valeur de la MP globale calculée par intégration numérique. On observe que la moyenne non corrigée par la pondération, en pointillés (\cdots), est loin de s'approcher de la vraie valeur tandis que la moyenne estimée avec la pondération, en trait plein (—), converge bien vers celle-ci.

Puisque $f_{\mathcal{X}}^0(x)$ est différent de $p(x)$, la question se pose de savoir pour quelle température il est préférable d'effectuer l'échantillonnage pondéré. Pour cela, nous étudions les statistiques sur un grand nombre ($M = 200$) de trajectoires comprenant chacune 2000 balayages, en faisant varier la température. Une estimation empirique de l'erreur quadratique nous permet d'apprécier la convergence de la méthode en fonction de T . Nous définissons d'abord le biais empirique comme

$$\beta_{lM}^x = \bar{x}_{lM} - E_p(x) \quad (\text{V.42})$$

i.e., l'écart entre la moyenne empiriques des moyennes estimées et la « vraie » moyenne (que nous avons calculée par intégration numérique). En appelant variance empirique le carré de l'écart-type empirique défini par l'équation (V.41), l'erreur quadratique empirique est donnée par

$$\epsilon_{lM}^x = \beta_{lM}^x{}^2 + \sigma_{lM}^x{}^2. \quad (\text{V.43})$$

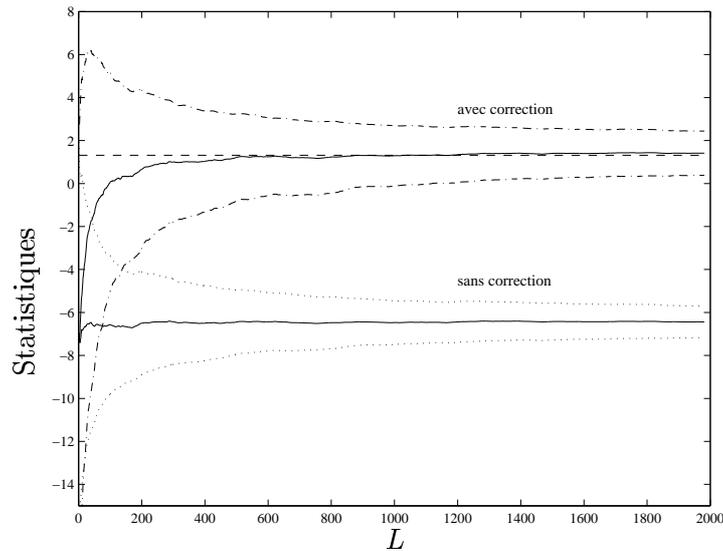


FIG. V.9 - Évolution des statistiques de l'estimée de la MP de $p(x)$ au cours de l'échantillonnage pondéré dans les mêmes conditions que Fig V.8. Au terme des 2000 balayages, la moyenne empirique des moyennes estimées avec correction, en trait plein (—), vaut 1,41 contre $-6,44$ sans correction, la vraie valeur étant 1,32. En revanche, comme on pouvait s'y attendre, l'écart-type empirique de l'estimée pondérée vaut 1,02 (— · —) contre 0,73 (· · ·) sans pondération. Au bilan, l'emploi de l'échantillonnage pondéré est pleinement justifié puisque la vraie valeur se situe à l'intérieur de l'intervalle de confiance défini par l'écart-type ce qui est loin d'être le cas sans correction.

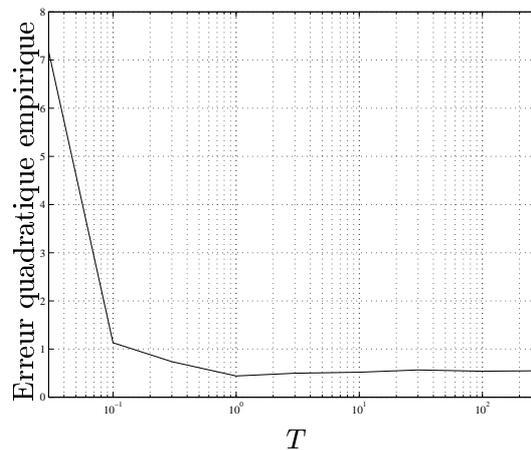


FIG. V.10 - Évolution, en fonction de la température, de l'erreur quadratique empirique EQE des moyennes estimées. Le biais étant très faible, l'EQE reflète surtout la variance. On observe qu'une faible relaxation de la contrainte ($T < 0,1$) engendre une forte augmentation de l'EQE, alors que celle-ci est stabilisée pour une forte relaxation ($T > 10$). Un compromis semble néanmoins se dessiner autour de $T = 1$.

On observe (*cf.* Fig. V.10 a) que l'erreur quadratique augmente fortement pour $T \rightarrow 0$ alors qu'elle semble se stabiliser vers une valeur finie pour $T \rightarrow \infty$. Il semblerait donc qu'en dehors de la zone « optimale » située autour de $T = 1$, l'utilisateur puisse aussi envisager d'utiliser une relaxation complète de la contrainte (*i.e.*, $J_T(x, h) = J_\infty(x, h) = J(x, h)$) avec une certaine efficacité car alors le terme de relaxation $[z - (h - h_0)(x - x_0)]/Ts^2$ disparaît du critère, ce qui allège d'autant les calculs.

4 Estimation MP-EGP en TIÉ

Dans le paragraphe précédent, nous établissons comment le problème inverse de TIÉ peut s'écrire sous une forme bilinéaire contrainte et comment cette difficulté, occasionnée par la contrainte en vue de l'estimation de la MP, peut être surmontée grâce à un *échantillonnage de Gibbs pondéré* (MP-EGP). Dans ce paragraphe, nous tirons parti du caractère bilinéaire contraint des équations (V.20) et (V.21) pour construire une méthode d'estimation MP-EGP en TIÉ.

La démarche que nous suivons ici est similaire à celle de l'exemple bivarié : le couple (x, h) est remplacé par le couple (σ, \mathring{v}) . Toutefois, deux différences majeures apparaissent. D'abord, la contrainte d'espace $\sigma > 0$ et le choix de loi *a priori* que nous opérons aboutissent à un échantillonnage de la variable $\gamma = \ln \sigma$ (donc substituée à σ) selon une loi qui n'est pas gaussienne. Ensuite, la mise en œuvre de l'EG pour déterminer la MP nécessite de déterminer une stratégie de balayage spécifique pour visiter tous les sites du couple (γ, \mathring{v}) .

La complexité des notations employées dans ce paragraphe peut apparaître quelque peu rébarbative. Toutefois, cette complexité reflète la prise en compte d'un grand nombre de spécificités propres à la TIÉ pour mettre en œuvre la méthode MP-EGP. Sans cette prise en compte, une méthode d'estimation stochastique en TIÉ est inenvisageable à cause d'un coût calcul rédhibitoire. On remarquera en revanche le caractère élémentaire des étapes de l'algorithme : résolution d'équation linéaire à une inconnue et tests d'inégalités (pour le tirage des γ_p), mettant en avant le caractère finalement « réalisable » de la méthode proposée.

4.1 Choix et écriture des densités

Afin d'effectuer l'échantillonnage pondéré, nous avons besoin d'écrire 3 densités : la densité de la loi relaxée (effectivement échantillonnée avec l'EG), la densité marginale de cette loi (reflétant l'échantillonnage sur γ) et la densité respectant la contrainte (dont on cherche la MP). Pour cela, nous partons des équations d'observations (V.20) ou (V.21). En relaxant la contrainte avec une température T , le modèle modifié se présente sous la forme

$$\mathbf{A}_\sigma^{11} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_\sigma^{12} \mathring{\mathbf{v}}^k = \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k + \bar{\mathbf{b}}^k, \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{V.44a})$$

$$\text{et } \mathbf{A}_\sigma^{21} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_\sigma^{22} \mathring{\mathbf{v}}^k = \mathring{\mathbf{b}}^k. \quad (\text{V.44b})$$

où $\bar{\mathbf{b}}^k \sim \mathcal{N}(0, s_k^2)$ et $\mathring{\mathbf{b}}^k \sim \mathcal{N}(0, T s_k^2)$. Le terme de fidélité aux observations du critère correspondant à la densité de la loi relaxée s'écrit donc

$$\mathcal{U}_{T\text{obs}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathring{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^K \frac{\|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{11} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{12} \mathring{\mathbf{v}}^k - \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k\|^2}{s_k^2} + \frac{\|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{21} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{22} \mathring{\mathbf{v}}^k\|^2}{T s_k^2} \right] \quad (\text{V.45})$$

$$\text{avec } \mathring{\mathbf{v}} = [(\mathring{\mathbf{v}}^1)^t, \dots, (\mathring{\mathbf{v}}^K)^t]^t, \quad (\text{V.46})$$

tandis que le terme correspondant, pour la loi respectant la contrainte, vaut

$$\mathcal{U}_{\text{obs}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^K \frac{\|[\mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{11} - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{12} (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{22})^{-1} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}^{21}] \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k\|^2}{s_k^2} \right] \quad (\text{V.47})$$

(pour l'obtenir, il suffit d'éliminer les $\mathring{\mathbf{v}}^k$ en introduisant leurs valeurs obtenues à partir de la contrainte qui se scinde ici en K contraintes).

Dans le paragraphe § 3, nous étudions un exemple dans lequel l'échantillonnage est gaussien pour les deux types de variables x et h . En fait, ceci n'est nullement nécessaire au bon fonctionnement de la méthode. Il suffit simplement que l'une des deux grandeurs (celle que l'on va éliminer) soit gaussienne et que l'on sache échantillonner la loi conditionnelle de l'autre grandeur. Ceci nous permet d'introduire une loi *a priori* non gaussienne sur $\boldsymbol{\sigma}$ de façon à respecter la contrainte d'ensemble $\boldsymbol{\sigma} > 0$. Dans le chapitre IV, nous avons souligné le rôle important joué dans la reconstruction par le changement de variable $\boldsymbol{\gamma} = \ln \boldsymbol{\sigma}$ et l'introduction d'un *a priori* sur $\boldsymbol{\gamma}$. Toutefois, plutôt qu'une reparamétrisation dans la densité, nous proposons ici d'utiliser un *changement de variable aléatoire* (cf. chapitre I § 3.4.1). Nous n'avons plus en effet de besoin de conserver le MAP par transformation puisque nous cherchons à estimer la MP. Ensuite, ce type de changement de variable permet que le nuage de points échantillonnés sous la nouvelle loi soit l'image par le changement de variable du nuage de points sous l'ancienne. Enfin, dans la mesure où le changement de variable est effectué pixel par pixel (ce qui est le cas ici), sa matrice jacobienne est diagonale. Le caractère markovien de la loi de départ est donc conservé avec la même structure de voisinage.

Nous commençons donc par présenter la loi à échantillonner en fonction de $\boldsymbol{\sigma}$. Nous choisissons ici une loi *a priori* dont l'énergie présente la forme

$$\mathcal{U}_{\text{apr}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} [\lambda \|\mathbf{H} \ln \boldsymbol{\sigma}\|^2 + \nu \|\ln \boldsymbol{\sigma}\|^2]. \quad (\text{V.48})$$

On a donc une loi *a priori* Gauss-Markov sur les différences premières en $\ln \boldsymbol{\sigma}$ (sur un voisinage d'ordre 1), via la matrice de différence \mathbf{H} (de taille $Q \times P$), et gaussienne (rapel à 0), via le terme de pénalisation $\nu \|\ln \boldsymbol{\sigma}\|^2$. Ce dernier terme est destiné à intervenir avec un très petit coefficient $\nu > 0$ de façon à rendre la loi *a priori* intégrable et à limiter d'éventuelles instabilités numériques. La formule de changement de variable aléatoire donnée par l'équation (I.29), appliquée sur la loi *a priori* avec la transformation $\boldsymbol{\Sigma} \mapsto \boldsymbol{\Gamma}$,

aboutit à la densité *a priori* suivante :

$$p_{\text{apr}}(\boldsymbol{\gamma}) \propto \exp -J_{\text{apr}}(\boldsymbol{\gamma}) \quad (\text{V.49})$$

$$\text{où } J_{\text{apr}}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} \left[\lambda \|\mathbf{H}\boldsymbol{\gamma}\|^2 + \nu \|\boldsymbol{\gamma}\|^2 - \sum_{p=1}^P \gamma_p \right], \quad (\text{V.50})$$

le dernier terme provenant du déterminant jacobien du changement de variable $\mathbf{\Gamma} = \ln \boldsymbol{\Sigma}$ qui s'écrit $\prod_{p=1}^P (\exp \gamma_p)$. Posons par ailleurs

$$J_{T_{\text{obs}}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) := \mathcal{U}_{T_{\text{obs}}}(\exp \boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) \quad (\text{V.51})$$

$$\text{et } J_{\text{obs}}(\boldsymbol{\gamma}) := \mathcal{U}_{\text{obs}}(\exp \boldsymbol{\gamma}). \quad (\text{V.52})$$

Alors, grâce à la règle de Bayes, les lois *a posteriori* s'écrivent

$$p(\boldsymbol{\gamma}) \propto \exp -[J_{\text{obs}}(\boldsymbol{\gamma}) + J_{\text{apr}}(\boldsymbol{\gamma})] \quad (\text{V.53})$$

pour la loi respectant la contrainte et

$$f_T(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) \propto \exp -[J_{T_{\text{obs}}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) + J_{\text{apr}}(\boldsymbol{\gamma})] \quad (\text{V.54})$$

pour la loi relaxée (*i.e.*, la fonction d'importance) que l'on échantillonne effectivement. En posant

$$f_T(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) = f_T(\mathring{\mathbf{v}} | \boldsymbol{\gamma}) f_T(\boldsymbol{\gamma}), \quad (\text{V.55})$$

on s'aperçoit que $f_T(\mathring{\mathbf{v}} | \boldsymbol{\gamma})$ est une densité gaussienne. Sa matrice de covariance $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}$ (de taille $\mathring{N}K \times \mathring{N}K$ avec $\mathring{N} := N - \bar{N}$) est donnée par

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}^{-1} = \text{diag} \{ (\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}^1)^{-1}, \dots, (\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}^K)^{-1} \},$$

i.e., la matrice bloc-diagonale des $(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}^k)^{-1}$, où $(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}^k)^{-1}$ est définie par

$$(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}^k)^{-1} = \frac{1}{s_k^2} (\mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{21} \mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{12} + \frac{1}{T} \mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{22} \mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{22}).$$

Quant à sa moyenne $\mathring{\mathbf{m}}_{\boldsymbol{\gamma}}$, elle vaut

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{m}}_{\boldsymbol{\gamma}} &= [(\mathring{\mathbf{m}}_{\boldsymbol{\gamma}}^1)^t, \dots, (\mathring{\mathbf{m}}_{\boldsymbol{\gamma}}^K)^t]^t \\ \text{avec } (\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}^k)^{-1} \mathring{\mathbf{m}}_{\boldsymbol{\gamma}}^k &= \frac{1}{s_k^2} [\mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{21} \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k - (\mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{21} \mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{11} - \frac{1}{T} \mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{22} \mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{21}) \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k]. \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit $f_T(\boldsymbol{\gamma})$:

$$\begin{aligned} f_T(\boldsymbol{\gamma}) &\propto \exp -I_T(\boldsymbol{\gamma}) \\ \text{où } I_T(\boldsymbol{\gamma}) &= \frac{1}{2} \left[- \sum_{k=1}^K \mathring{\mathbf{m}}_{\boldsymbol{\gamma}}^{k,t} (\mathbf{R}_{\boldsymbol{\gamma}}^k)^{-1} \mathring{\mathbf{m}}_{\boldsymbol{\gamma}}^k \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^K \frac{\|\mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{11} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k\|^2}{s_k^2} + \frac{\|\mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}^{21} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k\|^2}{T s_k^2} \\ &\quad \left. + \lambda \|\mathbf{H}\boldsymbol{\gamma}\|^2 + \nu \|\boldsymbol{\gamma}\|^2 - \sum_{p=1}^P \gamma_p \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.56})$$

4.2 Stratégie de balayage et formules de mises à jour

L'ensemble des sites à visiter comprend l'ensemble \mathcal{E} des P éléments Ω_p pour γ et (K fois) l'ensemble $\mathring{\mathcal{N}}$ des \mathring{N} nœuds intérieurs au domaine pour les \mathring{v}^k . Nous adoptons ici une stratégie de balayage site par site. En effet, en règle générale, cette stratégie semble plus efficace en terme de vitesse de convergence qu'un balayage parallélisé. De plus, en raison du caractère non gaussien de la conditionnelle $f_T(\gamma | \mathring{v})$, un tirage parallèle selon cette loi n'est pas simple. La stratégie que nous adoptons est donnée par le « noyau » algorithmique suivant :

Pour $p = 1, \dots, P$, faire

- Échantillonnage de γ_p selon $f_T(\gamma_p | \gamma_{\cdot p}, \mathring{v})$, où l'indice $\cdot p$ désigne toutes les composantes de γ excepté le p -ième ;
- Mise à jour des grandeurs, dépendant de γ , nécessaires à l'échantillonnage : $\mathbf{A}_{\text{exp } \gamma}$;
- Pour $n \in \mathring{\mathcal{S}}(p)$, l'ensemble des sommets voisins de l'élément p situés strictement à l'intérieur du domaine, pour $k = 1, \dots, K$, faire
 - Échantillonnage de v_n^k selon la loi $f_T(v_n^k | \mathring{v}_{\cdot n}^k, \gamma)$;
 - Mise à jour des grandeurs, dépendant de \mathring{v}^k , nécessaires à l'échantillonnage : $\mathbf{M}_{\mathring{v}^k}^2$.

La stratégie de balayage consiste donc à alterner les visites des éléments et les visites des sommets de ces éléments (s'ils sont strictement situés à l'intérieur du domaine). En effet, il semble qu'une modification de la conductivité sur un élément affectera plus fortement les potentiels de ses sommets que des autres. Au cours d'un balayage, un sommet intérieur sera donc visité autant de fois que le nombre d'éléments auquel il appartient. Remarquons en outre l'importance d'optimiser la mise à jour de $\mathbf{A}_{\text{exp } \gamma}$ et $\mathbf{M}_{\mathring{v}^k}^2$, *i.e.*, de ne mettre à jour que les composantes modifiées de façon à diminuer le coût de calcul de l'algorithme. La *rapidité* finale de l'algorithme dépend pour une bonne part de l'effort d'optimisation apporté à cet endroit. On peut aussi envisager d'ajouter $J_{T\text{obs}}(\gamma, \mathring{v})$ dans les grandeurs à calculer dans la mesure où la mise à jour de ce critère ajoute peu à l'effort algorithmique en cours (puisqu'il ne fait pas intervenir d'inversion de matrice et fait appel à des grandeurs calculées précédemment). Précisons maintenant les différentes mises à jour.

4.2.1 Tirage des v_n^k et mise à jour des $\mathbf{M}_{\mathring{v}^k}$

La mise à jour des v_n^k selon $f_T(v_n^k | \mathring{v}_{\cdot n}^k, \gamma)$ est relativement aisée puisque cette loi est une gaussienne monovariée, identifiable à partir de la relation

$$f_T(\gamma, \mathring{v}) = f_T(v_n^k | \mathring{v}_{\cdot n}^k, \gamma) f_T(\mathring{v}_{\cdot n}^k, \gamma).$$

En rappelant que $f_T(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) \propto \exp -J_{T_{\text{obs}}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}})$ avec

$$J_{T_{\text{obs}}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^K \frac{\left\| \mathbf{A}_{\text{exp}}^{11} \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_{\text{exp}}^{12} \boldsymbol{\gamma} \mathring{\mathbf{v}}^k - \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k \right\|^2}{s_k^2} + \frac{\left\| \mathbf{A}_{\text{exp}}^{21} \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k + \mathbf{A}_{\text{exp}}^{22} \boldsymbol{\gamma} \mathring{\mathbf{v}}^k \right\|^2}{T s_k^2} + \lambda \left\| \mathbf{H} \boldsymbol{\gamma} \right\|^2 + \nu \left\| \boldsymbol{\gamma} \right\|^2 - \sum_{p=1}^P \gamma_p \right], \quad (\text{V.57})$$

on obtient aisément la variance ϵ_{nk}^2 de la caractéristique locale

$$\epsilon_{nk}^2 = s_k^2 \left[\sum_{i \in \mathcal{N}} (\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma})_{in}^2 + \frac{1}{T} \sum_{i \in \mathring{\mathcal{N}}} (\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma})_{in}^2 \right]^{-1} \quad (\text{V.58})$$

ainsi que sa moyenne μ_{nk} donnée par

$$\frac{\mu_{nk}}{\epsilon_{nk}^2} = -\frac{1}{s_k^2} \left[\sum_{i \in \mathcal{N}} (\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma})_{in} \left(\sum_{j \neq n} (\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma})_{ij} v_j^k - j_i^{\text{obs}} \right) + \frac{1}{T} \sum_{i \in \mathring{\mathcal{N}}} (\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma})_{in} \left(\sum_{j \neq n} (\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma})_{ij} v_j^k \right) \right], \quad (\text{V.59})$$

qui suffisent pour faire un tirage selon $f_T(v_n^k | \mathring{\mathbf{v}}_n^k, \boldsymbol{\gamma})$. Remarquons que ces deux expressions peuvent être encore particularisées car la matrice $\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma}$ est très creuse, ce qui limite énormément le nombre de termes non nuls dans les sommations. En effet, $(\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma})_{ij} = 0$ s'il n'existe pas d'éléments communs aux sommets d'indices i et j . Le voisinage *a posteriori* du nœud n se réduit donc, d'une part aux *éléments* communs au nœud n et d'autre part aux *nœuds* distincts de n situés sur ces éléments. On peut dès lors mettre à jour les K matrices \mathbf{M}_{v^k} . Partant de l'équation V.14, si on « prime » les grandeurs mises à jour, il vient

$$(\mathbf{M}_{v^k})'_{ip} = (\mathbf{M}_{v^k})_{ip} + \xi(p, i, n)(v_n^{k'} - v_n^k). \quad (\text{V.60})$$

Le nombre d'éléments (i, p) à mettre à jour ainsi est réduit puisque $\xi(p, i, n) = 0$ si les sommets i et n ne sont pas communs à l'élément p . Si l'élément p comprend le nœud n pour sommet, il existe 3 indices i correspondant à des $\xi(p, i, n)$ non nuls. Pour un nombre moyen de 6 éléments comprenant le nœud n pour sommet, l'étape de remise à jour des \mathbf{M}_{v^k} comporte donc $18 \times K$ appels de la formule (V.60).

4.2.2 Tirage des γ_p et mise à jour de $\mathbf{A}_{\text{exp}} \boldsymbol{\gamma}$

Le tirage des γ_p selon $f_T(\gamma_p | \boldsymbol{\gamma}_p, \mathring{\mathbf{v}})$ s'avère plus délicat puisque cette densité n'est pas gaussienne. Commençons pour cela par identifier cette loi conditionnelle à partir de la relation

$$f_T(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) = f_T(\gamma_p | \boldsymbol{\gamma}_p, \mathring{\mathbf{v}}) f_T(\boldsymbol{\gamma}_p, \mathring{\mathbf{v}}).$$

On a $f_T(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) \propto \exp -J_{T_{\text{obs}}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}})$, avec (en utilisant l'autre écriture du modèle relaxé)

$$J_{T_{\text{obs}}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathring{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^K \frac{\|\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k}^1 \exp \boldsymbol{\gamma} - \bar{\mathbf{J}}_{\text{obs}}\|^2}{s_k^2} + \frac{\|\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k}^2 \exp \boldsymbol{\gamma}\|^2}{T s_k^2} + \lambda \|\mathbf{H} \boldsymbol{\gamma}\|^2 + \nu \|\boldsymbol{\gamma}\|^2 - \sum_{p=1}^P \gamma_p \right]. \quad (\text{V.61})$$

L'identification de la caractéristique locale à échantillonner $f_T(\gamma_p | \boldsymbol{\gamma}_{\cdot p}, \mathring{\mathbf{v}})$ peut donc s'effectuer à une constante multiplicative près

$$f_T(\gamma_p | \boldsymbol{\gamma}_{\cdot p}, \mathring{\mathbf{v}}) = \frac{1}{Z_{T_p}} \exp -J_{T_p}(\gamma_p) \quad (\text{V.62})$$

$$\text{avec } J_{T_p}(\gamma_p) := \frac{1}{2} [\alpha_{p1} e^{2\gamma_p} + \alpha_{p2} e^{\gamma_p} + \alpha_{p3} \gamma_p^2 + \alpha_{p4} \gamma_p], \quad (\text{V.63})$$

où les α_{pi} sont donnés par

$$\alpha_{p1} = \sum_{k=1}^K \frac{1}{s_k^2} \left[\sum_{n \in \mathcal{N}} (\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k})_{np}^2 + \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathring{\mathcal{N}}} (\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k})_{np}^2 \right],$$

$$\alpha_{p2} = \sum_{k=1}^K \frac{2}{s_k^2} \left[\sum_{n \in \mathcal{N}} (\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k}^1)_{np} \left(\sum_{i \neq p} (\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k})_{ni} e^{\gamma_i} - j_n^{\text{obs}} \right) + \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathring{\mathcal{N}}} (\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k})_{np} \left(\sum_{i \neq p} (\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k})_{ni} e^{\gamma_i} \right) \right],$$

$$\alpha_{p3} = \lambda \left[\sum_{q=1}^Q (\mathbf{H})_{qp}^2 \right] + \nu \text{ et}$$

$$\alpha_{p4} = 2\lambda \left[\sum_{q=1}^Q \sum_{i \neq p} (\mathbf{H})_{qp} (\mathbf{H})_{qi} \right] - 2.$$

Remarquons que $\alpha_{p1} > 0$ et $\alpha_{p3} > 0$. Comme pour $\mathbf{A}_{\text{exp } \boldsymbol{\gamma}}$, le caractère creux des $\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k}$ permet de mettre à jour γ_p à coût réduit. À partir de ce que nous venons de voir pour la mise à jour des $\mathbf{M}_{\mathbf{v}^k}$, le voisinage *a posteriori* de l'élément γ_p se compose d'une part de ses sommets et d'autre part des éléments voisins à l'ordre 2, *i.e.*, tous les éléments possédant un sommet commun avec lui. Remarquons que, puisque le voisinage *a priori* introduit par \mathbf{H} est un voisinage d'ordre 1, le voisinage *a posteriori* n'est pas étendu au delà de l'ordre 2.

La difficulté ici réside surtout dans le tirage selon $f_T(\gamma_p | \boldsymbol{\gamma}_{\cdot p}, \mathring{\mathbf{v}})$ qui ne revêt pas la forme d'une densité connue. Pour effectuer un tirage de γ_p selon cette densité, nous utilisons la *méthode de réjection*. Une présentation de cette méthode et son application au tirage de γ_p selon $f_T(\gamma_p | \boldsymbol{\gamma}_{\cdot p}, \mathring{\mathbf{v}})$ sont détaillées dans l'annexe § 6.2. Retenons que l'emploi de cette méthode, dont le coût algorithmique demeure peu élevé, s'avère particulièrement pratique pour mettre en œuvre un EG comportant des caractéristiques locales revêtant une forme plus élaborée qu'une densité gaussienne.

Pour la mise à jour de $\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}$, on peut, de même que pour les composantes des \mathbf{M}_{v^k} , faire apparaître le tableau ξ dans l'écriture de $\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}$. Nous établissons en effet dans l'annexe § 6.1 que

$$(\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma})_{ij} = \sum_{p=1}^P \xi(p, i, j) e^{\gamma p}$$

pour $(i, j) \in \mathcal{N}^2$. Il est dès lors aisé d'en déduire la formule de remise à jour de $\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}$ qui suit

$$(\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma})'_{ij} = (\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma})_{ij} + \xi(p, i, j)(e^{\gamma p'} - e^{\gamma p}). \quad (\text{V.64})$$

Comme pour les \mathbf{M}_{v^k} , le nombre de couple (i, j) à mettre à jour est limité puisque, à p fixé, $\xi(p, i, j)$ est non nul uniquement si la paire de nœuds $\{i, j\}$ appartient à l'élément p , ce qui donne 9 couples (i, j) (donc 9 éléments de $\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}$) à mettre à jour. Le nombre d'appels de (V.64) se ramène donc à 6 en utilisant la propriété de symétrie $(\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma})_{ij} = (\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma})_{ji}$.

4.2.3 Pondération des échantillons

La dernière étape de la méthode consiste à mettre en œuvre l'échantillonnage pondéré pour obtenir la MP. La contrainte d'espace $\sigma > 0$ étant automatiquement vérifiée grâce au changement de variable $\gamma = \ln \sigma$, il n'est pas nécessaire de rejeter des échantillons successifs de γ_l , $l = L_0, \dots, L$. Le choix de L dépend non seulement de la rapidité de l'algorithme mais aussi des capacités et moyens de stockage disponibles. On obtient alors

$$\gamma^{\text{MP}} = \frac{\sum_{l=L_0}^L \omega(\gamma_l) \gamma_l}{\sum_{l=L_0}^L \omega(\gamma_l)} \quad (\text{V.65})$$

avec

$$\begin{aligned} \omega(\gamma) &= \frac{p(\gamma)}{f_T(\gamma)} \\ &\propto \exp -J(\gamma) + I_T(\gamma) \\ &\propto \exp -J_{\text{obs}}(\gamma) - J_{\text{apr}}(\gamma) + I_{T_{\text{obs}}}(\gamma) + I_{T_{\text{apr}}}(\gamma). \end{aligned} \quad (\text{V.66})$$

Or, d'après l'équation (V.56), $I_{T_{\text{apr}}}(\gamma)$ s'identifie avec $J_{\text{apr}}(\gamma)$. On obtient donc, après élimination des termes provenant de la régularisation,

$$\boxed{\omega(\gamma) \propto \exp -\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^K \frac{\|[\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}^{11} - \mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}^{12} (\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}^{22})^{-1} \mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}^{21}] \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k\|^2}{s_k^2} + \sum_{k=1}^K \bar{\mathbf{m}}_{\gamma}^{k \text{ t}} (\mathbf{R}_{\gamma}^k)^{-1} \bar{\mathbf{m}}_{\gamma}^k - \left(\sum_{k=1}^K \frac{\|\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}^{11} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k - \bar{\mathbf{j}}_{\text{obs}}^k\|^2}{s_k^2} + \frac{\|\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}^{21} \bar{\mathbf{v}}_{\text{obs}}^k\|^2}{T s_k^2} \right) \right]}. \quad (\text{V.67})$$

On observe que le calcul de la pondération fait appel à des structures algorithmiques plus élaborées (inversion de matrices) que la phase d'échantillonnage. Toutefois, comme ce calcul n'est pas requis à chaque tirage mais après chaque balayage, cela alourdit peu le coût algorithmique de la méthode (d'autant plus que les matrices à inverser sont creuses).

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous tirons parti de la propriété structurelle de bilinéarité sous contrainte du problème de TIÉ (écrite sous la forme d'un modèle joint) pour proposer une méthode d'estimation spécifique de la MP par échantillonnage de Gibbs pondéré (MP-EGP). Pour construire et valider cette méthode, nous nous appuyons d'une part sur les résultats théoriques de convergence de l'EG et de l'échantillonnage pondéré et d'autre part sur les résultats de simulations opérés sur un exemple bivarié. Ces résultats valident l'utilisation d'une fonction d'importance construite en relaxant la contrainte, et semblent indiquer qu'une température de relaxation suffisamment élevée doit être utilisée afin de limiter l'erreur quadratique moyenne de l'estimée. Nous avons choisi un exemple suffisamment simple pour que l'étude ait une portée générale. En même temps, il constitue un bon reflet des difficultés du problème de TIÉ et nous permet d'en tirer une méthode MP-EGP adaptée.

Pour celle-ci, nous exploitons les avantages obtenus pour le MAP (*cf.* chapitre IV) avec l'emploi de la log-conductivité γ dans la régularisation, en le réintroduisant dans l'estimation MP, mais ici sous la forme d'un *changement de variable aléatoire*. La stratégie de balayage adoptée, utilisant comme seuls supports les sites un par un, consiste en une alternance entre les sites-éléments pour γ et les sites-noeuds pour les potentiels internes ψ . Bien que l'introduction de cette dernière grandeur par rapport au MAP augmente le nombre de données à estimer, le voisinage *a posteriori* de chaque caractéristique locale se réduit aux seuls sites adjacents du site visité, ce qui confère à chaque étape de l'algorithme un coût de calcul très faible. La MP-EGP n'a pu, faute de temps, être mise en œuvre à ce jour pour la TIÉ. Néanmoins, la convergence observée dans l'exemple bivarié laisse entrevoir de bons résultats pour cette méthode.

6 Annexe

6.1 Écriture des matrices \mathbf{M}_v et \mathbf{A}_σ

La matrice \mathbf{M}_v est définie par la relation

$$\mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} =: \mathbf{M}_v \sigma.$$

Posons

$$\alpha := \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \mathbf{M}_v \sigma. \quad (\text{V.68})$$

Alors, d'après les équations (III.36) selon laquelle

$$\mathbf{A}_\sigma = (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) \Lambda_\sigma (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) + \mathbf{W}_n \Lambda_\sigma \mathbf{W}_n$$

et l'équation (III.26a) qui s'écrit

$$\Lambda_\sigma = \mathbf{B}^t \Delta_\sigma \mathbf{B} + \mathbf{C}^t \Delta_\sigma \mathbf{C},$$

on obtient

$$\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t [(\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n) (\mathbf{B}^t \Delta_\sigma \mathbf{B} + \mathbf{C}^t \Delta_\sigma \mathbf{C}) (\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n)] \mathbf{v}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N &:= \mathbf{B}(\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n), \\ \mathbf{C}_N &:= \mathbf{C}(\mathbf{I}_N - \mathbf{W}_n), \\ \mathbf{B}_n &:= \mathbf{B}\mathbf{W}_n \\ \text{et } \mathbf{C}_n &:= \mathbf{C}\mathbf{W}_n. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left\{ \sum_{i=1}^N [(\mathbf{B}_N)_{pi} v_i]^2 + [(\mathbf{C}_N)_{pi} v_i]^2 + [(\mathbf{B}_n)_{pi} v_i]^2 + [(\mathbf{C}_n)_{pi} v_i]^2 \right\}.$$

Or, d'après l'équation (V.68), on a

$$\mathbf{M}_v = \mathbf{grad}_v (\mathbf{grad}_\sigma \alpha)$$

ce qui donne, point par point, l'expression de la matrice \mathbf{M}_v :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_v)_{n_0 p_0} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v_{n_0} \partial \sigma_{p_0}} \\ &= \sum_{i=1}^N [(\mathbf{B}_N)_{p_0 n_0} (\mathbf{B}_N)_{p_0 i} + (\mathbf{C}_N)_{p_0 n_0} (\mathbf{C}_N)_{p_0 i} \\ &\quad + (\mathbf{B}_n)_{p_0 n_0} (\mathbf{B}_n)_{p_0 i} + (\mathbf{C}_n)_{p_0 n_0} (\mathbf{C}_n)_{p_0 i}] v_i. \end{aligned} \quad (\text{V.69})$$

En posant alors

$$\xi(p, n, i) := (\mathbf{B}_N)_{pn}(\mathbf{B}_N)_{pi} + (\mathbf{C}_N)_{pn}(\mathbf{C}_N)_{pi} + (\mathbf{B}_n)_{pn}(\mathbf{B}_n)_{pi} + (\mathbf{C}_n)_{pn}(\mathbf{C}_n)_{pi},$$

on s'aperçoit que le tableau ξ de taille $P \times N \times N$ est extrêmement *creux* et qu'il ne dépend que des caractéristiques géométriques du maillage. De plus, on a la symétrie $\xi(p, n, i) = \xi(p, i, n)$. On peut donc stocker ξ aisément et retenir que

$$\boxed{(\mathbf{M}_v)_{np} = \sum_{i=1}^N \xi(p, n, i)v_i.} \quad (\text{V.70})$$

On peut aussi exprimer les composantes de \mathbf{A}_σ sous une forme similaire. En effet, \mathbf{A}_σ peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{A}_\sigma = \mathbf{B}_N^t \Delta_\sigma \mathbf{B}_N + \mathbf{C}_N^t \Delta_\sigma \mathbf{C}_N + \mathbf{B}_n^t \Delta_\sigma \mathbf{B}_n + \mathbf{C}_n^t \Delta_\sigma \mathbf{C}_n,$$

ce qui revient à écrire, composante par composante

$$(\mathbf{A}_\sigma)_{ij} = \sum_{p=1}^P [(\mathbf{B}_N)_{pi}(\mathbf{B}_N)_{pj} + (\mathbf{C}_N)_{pi}(\mathbf{C}_N)_{pj} + (\mathbf{B}_n)_{pi}(\mathbf{B}_n)_{pj} + (\mathbf{C}_n)_{pi}(\mathbf{C}_n)_{pj}] \sigma_p,$$

soit encore, sous une forme comparable à \mathbf{M}_v ,

$$\boxed{(\mathbf{A}_\sigma)_{ij} = \sum_{p=1}^P \xi(p, i, j) \sigma_p.} \quad (\text{V.71})$$

6.2 Tirage par la méthode de réjection

La méthode de réjection est surtout utilisée pour effectuer des tirages selon des lois monovariée. On peut en trouver une présentation dans [Chib et Greenberg 1994] ou dans des ouvrages de programmation tels que [Press et coll. 1986]. Sa formulation est la suivante.

Propriété V.1 (Méthode de réjection).

Soit $f(x)$ une densité de probabilité. Supposons que

- Il existe une densité $g(x)$ que l'on sait échantillonner ;
- Il existe un réel $\eta > 0$ tel que, $\forall x, \eta f(x) \leq g(x)$.

Alors, le tirage de x selon la procédure suivante

1. Tirer x_{pot} selon la loi $g(x)$;
2. Tirer u selon $\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$, distribution uniforme sur $[0, 1]$;
3. Si $u \leq \frac{g(x_{\text{pot}})}{\eta f(x_{\text{pot}})}$, faire $x \leftarrow x_{\text{pot}}$ et sortir, sinon, aller en 1.

est un tirage effectué selon $f(x)$.

On remarque entre autre qu'il n'est pas nécessaire de connaître η . Seule la connaissance du produit $\eta f(x)$ est requise, ce qui permet d'effectuer un tirage selon une densité $f(x)$ sans connaître sa constante de normalisation. Ceci est particulièrement intéressant pour le cas qui nous intéresse puisque la densité que l'on cherche à échantillonner est du type

$$f(\gamma) = \frac{1}{Z_f} \exp -J(\gamma)$$

avec $J(\gamma) = \frac{1}{2}[\alpha_1 e^{2\gamma} + \alpha_2 e^\gamma + \alpha_3 \gamma^2 + \alpha_4 \gamma],$

avec Z_f inconnu (et $\alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0$). L'idée que nous mettons en œuvre ici consiste à utiliser comme majorant une densité gaussienne de sorte que la condition

$$\exists (\eta, g(\gamma)) \text{ t.q. } \forall \gamma, \eta f(\gamma) \leq g(\gamma),$$

se ramène, en posant

$$g(\gamma) = \frac{1}{Z_g} \exp -K(\gamma),$$

à la condition suivante

$$\exists(\eta, K(\gamma)) \text{ t.q. } \forall \gamma, \eta \frac{1}{Z_f} \exp -J(\gamma) \leq \frac{1}{Z_g} \exp -K(\gamma),$$

où $K(\gamma) = \frac{(\gamma-\mu)^2}{2\epsilon^2}$. Dès lors, en posant

$$\alpha_5 = -2\ln \frac{\eta Z_g}{Z_f}$$

la condition revient à

$$\exists(\mu, \epsilon, \alpha_5) \text{ t.q. } \forall \gamma, \frac{(\gamma - \mu)^2}{2\epsilon^2} \leq J(\gamma) + \frac{\alpha_5}{2}.$$

soit encore

$$\exists(\mu, \epsilon, \alpha_5) \text{ t.q. } \forall \gamma, \alpha_1 e^{2\gamma} + \alpha_2 e^\gamma + \left(\alpha_3 - \frac{1}{\epsilon^2}\right)\gamma^2 + \left(\alpha_4 + \frac{2\mu}{\epsilon^2}\right)\gamma + \alpha_5 - \frac{\mu^2}{\epsilon^2} \geq 0.$$

(V.72)

En choisissant de paramétrer la variance par

$$\epsilon^2 = \frac{1}{\alpha_3}$$

et la moyenne par

$$\mu = -\frac{\alpha_4}{2\alpha_3},$$

il suffit de déterminer un α_5 tel que

$$\alpha_1 e^{2\gamma} + \alpha_2 e^\gamma + \alpha_5 - \frac{\alpha_4^2}{4\alpha_3} \geq 0,$$

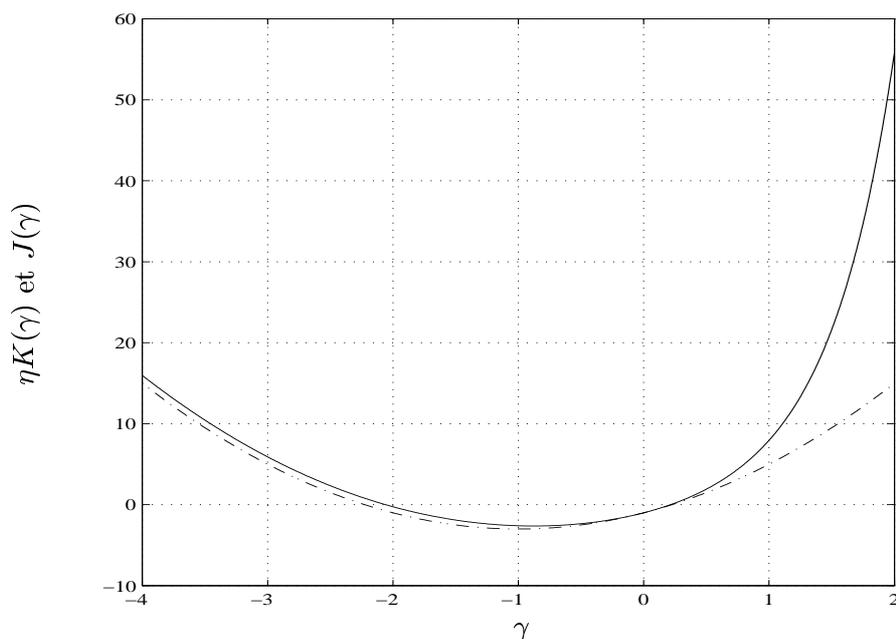


FIG. V.11 - Méthode de réjection. Allures respectives de $K(\gamma)$ ($-\cdot$) et $J(\gamma)$ ($-$). Nous prenons ici $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -4$, $\alpha_3 = 4$ et $\alpha_4 = 8$. Nous choisissons le coefficient $\alpha_5 = \alpha_4^2/4\alpha_3 + \alpha_2^2/4\alpha_1 = 6$ qui vérifie au plus juste la condition (V.74).

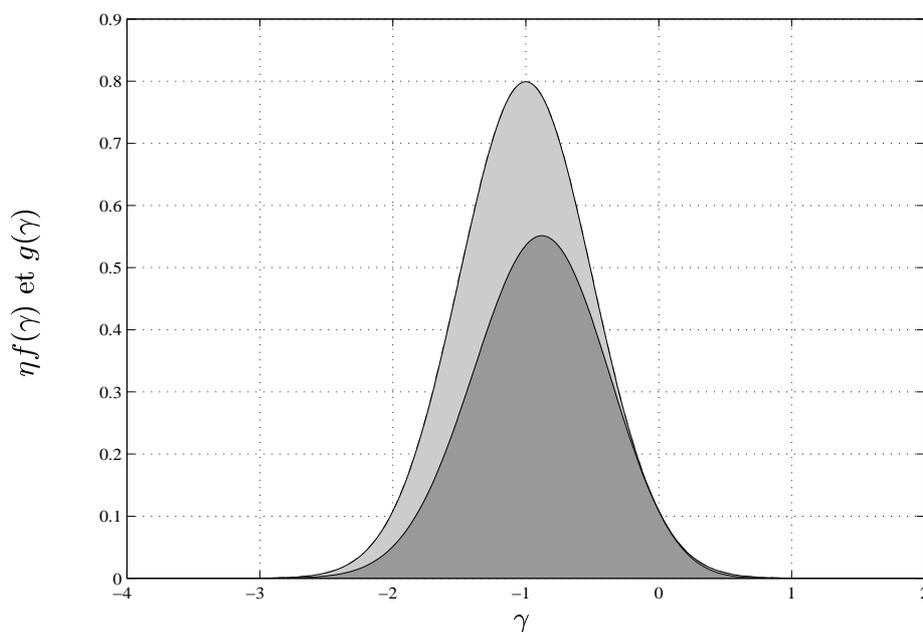


FIG. V.12 - Méthode de réjection. Allures respectives de $g(\gamma)$ (délimitant la cloche en gris clair) et $\eta f(\gamma)$ (délimitant la cloche en gris foncé), avec les mêmes choix de coefficients que dans la Fig. V.11. Le taux de réjection de cette méthode d'échantillonnage vaut le rapport de l'aire comprise entre les deux courbes (en gris clair) sur l'aire comprise sous g (somme des aires en clair et en foncé). Pour la minimiser, on choisit le coefficient α_5 qui vérifie au plus juste les conditions finales (V.74) et (V.75).

ou bien encore

$$\alpha_1 \sigma^2 + \alpha_2 \sigma + \alpha_5 - \frac{\alpha_4^2}{4\alpha_3} \geq 0 \quad (\text{V.73})$$

avec $\sigma > 0$. Si l'argument du minimum de cette parabole (qui vaut $\sigma_{\min} = -\alpha_2/2\alpha_1$) est strictement positif, (*i.e.*, puisque $\alpha_1 > 0$, si $\alpha_2 < 0$), alors la condition devient

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} + \alpha_5 - \frac{\alpha_4^2}{4\alpha_3} &\geq 0 \\ \text{i.e., } \alpha_5 &\geq \frac{\alpha_4^2}{4\alpha_3} + \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1} \end{aligned} \quad (\text{V.74})$$

tandis que si $\sigma_{\min} \leq 0$, (*i.e.*, $\alpha_2 \geq 0$) il apparaît de suite que la condition devient

$$\alpha_5 \geq \frac{\alpha_4^2}{4\alpha_3}. \quad (\text{V.75})$$

Pour minimiser le taux de réjection, on prendra le coefficient α_5 qui vérifie au plus juste, soit la condition (V.74) si $\alpha_2 < 0$, soit la condition (V.75) si $\alpha_2 \geq 0$ (*cf.* Figs. V.11 et V.12).

L'algorithme de tirage de la loi $f(\gamma)$ se résume donc à la procédure suivante

$u \leftarrow 2$;
 $\gamma_{\text{pot}} = \gamma_0$;
 Tant que $u > \exp -J(\gamma) + K(\gamma) - \alpha_5$, faire

- Tirer $\gamma_{\text{pot}} \sim \mathcal{N}(\mu, \epsilon^2)$;
- Tirer u selon $\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$, distribution uniforme sur $[0, 1]$.

$\gamma = \gamma_{\text{pot}}$.

CONCLUSION

RÉSUMÉ DE L'ÉTUDE ET PERSPECTIVES

LA PRINCIPALE DIFFICULTÉ lors de la résolution du problème inverse de tomographie d'impédance électrique provient du caractère non linéaire du liant les grandeurs observées (potentiels et courants électriques) à la grandeur recherchée.

La construction d'un simulateur numérique reproduisant fidèlement le phénomène constitue donc une première difficulté. Nous montrons que l'utilisation de la méthode des éléments finis pour modéliser le problème direct s'avère particulièrement intéressante en TIÉ. En effet, le découpage du milieu en éléments permet de construire un modèle qui s'adapte de manière très souple à la géométrie du milieu étudié. Ensuite, l'ordre peu élevé des fonctions de base utilisées (ordre 0 et 1) induit des matrices de rigidités très creuses et, par conséquent, des coûts de calculs très peu élevés. Enfin, avec la MÉF, on obtient une précision d'approximation du modèle direct comprise entre 50 et 70 dB, *i.e.*, de l'ordre de grandeur des incertitudes sur les mesures. Par conséquent, le caractère non linéaire du problème direct est correctement préservé par la méthode.

Le problème inverse de TIÉ est un problème mal-posé. Ceci explique l'instabilité d'un grand nombre de méthodes d'estimation (non régularisées) utilisées jusqu'ici. Dans ce travail, nous proposons et mettons en œuvre une méthode d'estimation de type maximum *a posteriori* reposant sur l'introduction d'une loi *a priori* Huber-Markov sur la log-conductivité. Une minimisation efficace du critère (non convexe) est obtenue par la méthode du gradient pseudo-conjugué. Les résultats obtenus font valoir des améliorations en terme de robustesse au bruit, de contraste, de rapidité d'exécution et de qualité de reconstruction (la loi Huber-Markov favorisant la conservation des discontinuités de l'objet lors de la reconstruction).

En dernier lieu, nous présentons une méthode (MP-EGP) d'estimation de la moyenne *a posteriori* qui exploite directement une écriture bilinéaire du problème direct de TIÉ, appelée modèle joint. En effet, cette propriété, souvent utilisée dans les méthodes déterministes d'estimation, est quasiment demeurée inexploitée à ce jour dans le cadre des méthodes stochastiques d'estimation pour les problèmes inverses non linéaires. D'autre part, il apparaît que les méthodes de Métropolis ou de recuit simulé, appliquées à ce type de problèmes, sont d'un coût de calcul trop élevé pour être utilisables. Pour tirer parti de cette propriété, la méthode MP-EGP utilise un échantillonnage de Gibbs avec une stratégie de balayage site par site. Le caractère contraint de cette écriture bilinéaire constitue une difficulté supplémentaire qui est résolue grâce à l'introduction d'une correction par échantillonnage pondéré. Un exemple simple illustre le comportement, les difficultés ainsi

que la convergence de la méthode proposée.

La poursuite de toute cette étude peut être complétée dans plusieurs directions :

- Bien évidemment, le premier travail réside dans la mise en œuvre et la validation de la méthode MP-EGP en TIÉ. Une mise en œuvre à partir de routines *Cmex* commandées depuis *Matlab* est actuellement en cours ;
- Si les résultats obtenus à partir de cette méthode s'avèrent prometteurs, l'introduction de lois *a priori* non gaussiennes (*e.g.*, de type \mathcal{L}_1) sur la log-conductivité peut être envisagée de façon à mieux restaurer les discontinuités ;
- Il peut être intéressant d'étudier, pour comparaison avec la méthode MAP proposée ici, une méthode d'estimation MAP de γ construite, non plus avec un changement de paramètre dans la densité *a posteriori* mais par un changement de variable aléatoire ;
- Il sera également envisageable d'étudier l'introduction de raffinement de maillages opérés, au cours de l'optimisation, dans des zones bien délimitées du milieu, par exemple, aux endroits où apparaissent d'importantes différences entre les log-conductivités. Ceci permettrait d'augmenter la résolution de l'estimateur de manière presque aussi efficace et moins coûteuse qu'un raffinement général du maillage ;
- Enfin, il est bien sûr souhaitable de tester la méthode à partir de données réellement observées. Dans ce cas, l'incorporation dans le modèle direct, de la connaissance exacte de la conductivité des électrodes, ainsi que leur géométrie, pourront être pris en compte grâce à la souplesse de la MÉF.

Dans le cadre de perspectives plus fondamentales, la possibilité d'incorporation au sein de la méthode MP-EGP, d'une étape d'estimation des hyperparamètres, pourra être étudiée, à l'instar des travaux proposés dans [Cheng et coll. 1996] en déconvolution myope. Par ailleurs, l'exploitation des méthodes que nous proposons ici en TIÉ peut s'étendre à d'autres problèmes inverses non linéaires. Ainsi, des problèmes de tomographie (comme la tomographie à ondes diffractées ou à courant de Foucault par exemple) sont susceptibles d'être exploités avec la MÉF. Des étapes dans ce sens ont déjà été franchies dans [Carfantan 1996] avec l'utilisation de la méthode des moments (méthode mixte). Toutefois, les matrices de rigidité obtenues avec cette méthode sont pleines, ce qui limite les capacités d'inversion et le nombre de pixels à étudier. De manière générale, tout problème inverse non linéaire modélisé à partir de méthodes discrètes (et non plus mixtes) comme la MÉF, est susceptible d'être exploité efficacement grâce au caractère creux des tenseurs intervenant dans leur modèle direct.

Bibliographie

- [Alessandrini 1988] G. Alessandrini (1988), « Stable determination of conductivity by boundary measurements », *Applicable Analysis*, **27**, pages 153–172.
- [Andrews et Hunt 1977] H. Andrews et B. Hunt (1977), « Digital Image Restoration », *Englewood Cliffs: Prentice-Hall*.
- [Babuska et Rheinboldt 1978] I. Babuska et W. Rheinboldt (1978), « Error estimates for adaptive finite element computations », *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **15**, n° 4, pages 736–754.
- [Babuska et Rheinboldt 1979] I. Babuska et W. Rheinboldt (1979), « On the reliability and optimality of the finite element method », *Comput. Struct.*, **10**, pages 87–94.
- [Barber et Brown 1986] D. Barber et B. Brown (1986), « Recent developments in applied potential tomography », *APT Information Processing in Medical Imaging*, pages 106–121.
- [Bates et coll. 1980] R. Bates, G. McKinnon et A. Seagar (1980), « A limitation on systems for Imaging Electrical Conductivity Distribution », *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **27**, n° 7, pages 418–420.
- [Bertsekas 1995] D. P. Bertsekas (1995), *Nonlinear programming*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.
- [Besag 1974] J. E. Besag (1974), « Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems (With discussion) », *Journal of the Royal Statistical Society B*, **36**, n° 2, pages 192–236.
- [Besag et Green 1993] J. E. Besag et P. Green (1993), « Spatial statistics and Bayesian computation », *J. R. Statist. Soc. B*, **55**, pages 25–37.
- [Besag et coll. 1991] J. E. Besag, J. York et A. Mollié (1991), « Bayesian Image Restoration, with two applications in Spatial Statistics », *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, **43**, n° 1, pages 1–59.
- [Blake et Zisserman 1987] A. Blake et A. Zisserman (1987), *Visual Reconstruction*, Cambridge, MA: MIT Press.
- [Bouman et Sauer 1993] C. Bouman et K. Sauer (1993), « A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation », *IEEE Transactions on Image Processing*, **IP-2**, n° 3, pages 296–310.

- [Brette et coll. 1997] S. Brette, H. Carfantan, J.-F. Giovanelli, C. Heinrich et T. Martin (1997), « GPAV.M : une grande œuvre collective », Rapport interne, GPI-LSS, Gif-sur-Yvette.
- [Calderon 1980] A. P. Calderon (1980), « On an inverse boundary value problem », dans *Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics*, pages 65–73, Soc Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro.
- [Carfantan 1996] H. Carfantan (1996), *Approche bayésienne pour un problème inverse non linéaire en imagerie à ondes diffractées*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.
- [Carfantan et Mohammad-Djafari 1995] H. Carfantan et A. Mohammad-Djafari (1995), « A Bayesian Approach for Nonlinear Inverse Scattering Tomographic Imaging », dans *Proceedings of IEEE ICASSP*, volume IV, pages 2311–2314, Detroit, U.S.A.
- [Carfantan et coll. 1997] H. Carfantan, A. Mohammad-Djafari et J. Idier (1997), « A single site update algorithm for nonlinear diffraction tomography », dans *Proceedings of IEEE ICASSP*, pages 2837–2840, Munich, Germany.
- [Champagnat 1993] F. Champagnat (1993), *Déconvolution impulsionnelle et extensions pour la caractérisation des milieux inhomogènes en échographie*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.
- [Chen et Paoloni 1992] Z. Chen et F. Paoloni (1992), « An Integral Equation Approach to Electrical Conductance Tomography », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **11**, n° 4, pages 570–576.
- [Cheng et coll. 1996] Q. Cheng, R. Chen et L. Ta-Hsin (1996), « Simultaneous Wavelet Estimation and Deconvolution of Reflection Seismic Signals », *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **34**, pages 377–384.
- [Chib et Greenberg 1994] S. Chib et E. Greenberg (1994), « Understanding the Metropolis Hastings Algorithm », Rapport technique, Olin School of Business, Univ. of Washington, USA.
- [Cohen-Bacrie 1994] C. Cohen-Bacrie (1994), *Régularisation du problème inverse de tomographie d'impédance électrique*, Master's thesis, École polytechnique de Montréal.
- [Davies 1980] A. J. Davies (1980), *The Finite Element Method: A First Approach*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series.
- [Demoment 1987] G. Demoment (1987), *Algorithmes rapides*, volume 3152, Service d'Édition de SUPÉLEC.
- [Demoment 1989] G. Demoment (1989), « Image Reconstruction and Restoration: Overview of Common Estimation Structure and Problems », *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, **ASSP-37**, n° 12, pages 2024–2036.

- [Dines et Lytle 1981] K. Dines et R. Lytle (1981), « Analysis of electrical imaging », *Geophysics*, **46**, n° 7, pages 1025–1036.
- [Dobson et Santosa 1994] D. Dobson et F. Santosa (1994), « An image-enhancement technique for electrical impedance tomography », *Inverse Problems*, **10**, pages 317–334.
- [Dobson et Santosa 1994] D. C. Dobson et F. Santosa (1994), « Resolution and Stability analysis of an inverse problem in Electrical Impedance Tomography: dependence on the input current patterns », *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **54**, n° 6, pages 1542–1560.
- [Eriksson 1996] J. Eriksson (1996), *Optimization and regularization of nonlinear least squares problems*, Thèse de doctorat, Umeå University, Sweden.
- [Fox et Nicholls 1997] C. Fox et G. Nicholls (1997), « Sampling Conductivity via MCMC », dans *Leeds annual statistics workshop*, juin 1997.
- [Garnero et coll. 1991] L. Garnero, A. Franchois, J.-P. Hugonin, C. Pichot et N. Joachimowicz (1991), « Microwave imaging – Complex permittivity reconstruction by simulated annealing », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology*, **39**, n° 11, pages 1801–1807.
- [Gautier et coll. 1997] S. Gautier, J. Idier, F. Champagnat, A. Mohammad-Djafari et B. Lavayssière (1997), « Traitement d'échogrammes ultrasonores par déconvolution aveugle », dans *Actes du 16^e Colloque GRETSI*, 1997.
- [Gelfand et Smith 1990] A. E. Gelfand et A. F. M. Smith (1990), « Sampling based approaches to calculating marginal densities », *J. Am. Statist. Ass.*, **85**, pages 398–409.
- [Geman 1990] D. Geman (1990), *Random fields and inverse problems in imaging*, volume 1427, pages 117–193, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XVIII - 1988, Springer-Verlag, lecture notes in mathematics edition.
- [Geman et Reynolds 1992] D. Geman et G. Reynolds (1992), « Constrained Restoration and Recovery of Discontinuities », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **PAMI-14**, n° 3, pages 367–383.
- [Geman et Yang 1995] D. Geman et C. Yang (1995), « Nonlinear Image Recovery with Half-Quadratic Regularization », *IEEE Transactions on Image Processing*, **IP-4**, n° 7, pages 932–946.
- [Geman et Geman 1984] S. Geman et D. Geman (1984), « Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **PAMI-6**, n° 6, pages 721–741.
- [Geman et McClure 1987] S. Geman et D. McClure (1987), « Statistical Methods for Tomographic Image Reconstruction », dans *Proc. of the 46-th Session of the ISI, Bulletin of the ISI*, volume 52, pages 22–26, 1987.

- [George 1991] P. L. George (1991), *Génération automatique de maillages*, Masson.
- [Goussard 1992] Y. Goussard (1992), « Tomographie d'impédance: approche par fonctions de Green », Rapport technique.
- [Goussard et Demoment 1989] Y. Goussard et G. Demoment (1989), « Recursive deconvolution of Bernoulli-Gaussian processes using a MA representation », *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **GE-27**, pages 384–394.
- [Green 1990] P. J. Green (1990), « Bayesian Reconstructions From Emission Tomography Data Using a Modified EM Algorithm », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **MI-9**, n° 1, pages 84–93.
- [Hammersley et Clifford 1968] J. Hammersley et P. Clifford (1968), « Markov fields of finite graphs and lattices », Rapport technique, University of California-Berkeley, preprint.
- [Harrington 1987] R. F. Harrington (1987), « The method of moments in electromagnetics », *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **1**, n° 3, pages 181–200.
- [Hastings 1970] W. K. Hastings (1970), « Monte Carlo sampling methods using Markov Chains and their applications », *Biometrika*, **57**, pages 97.
- [Hebert et Leahy 1989] T. Hebert et R. Leahy (1989), « A generalized EM algorithm for 3-D bayesian reconstruction from poisson data using Gibbs priors », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **8**, n° 2, pages 194–202.
- [Hofmann et Scherzer 1994] B. Hofmann et O. Scherzer (1994), « Factors influencing the ill-posedness of nonlinear problems », *Inverse Problems*, pages 1277–1297.
- [Howard et Kretzschmar 1986] A. Q. J. Howard et J. L. Kretzschmar (1986), « Synthesis of EM Geophysical Tomographic Data », *Proceedings of the IEEE*, **74**, n° 2, pages 353–360.
- [Hua et coll. 1991] P. Hua, E. Woo, J. Webster et W. Tompkins (1991), « Iterative reconstruction methods using regularization and optimal current patterns in electrical impedance tomography. », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, pages 621–628.
- [Huber 1981] P. Huber (1981), *Robust Statistics*, New York: John Wiley & Sons.
- [Hunt 1977] B. Hunt (1977), « Bayesian Methods in Nonlinear Digital Image Restoration », *IEEE Transactions on Communications*, **C-26**, pages 219–229.
- [Idier 1991] J. Idier (1991), *Imagerie des milieux stratifiés : modélisation markovienne, application à la déconvolution sismique*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.

- [Idier et Goussard 1990] J. Idier et Y. Goussard (1990), « Stack algorithm for recursive deconvolution of Bernoulli-Gaussian processes », *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **GE-28**, n° 5, pages 975–978.
- [Inman et coll. 1973] J. R. Inman, J. Ryu et S. H. Ward (1973), « Resistivity Inversion », *Geophysics*, **38**, n° 6, pages 1088–1108.
- [Isaacson 1986] D. Isaacson (1986), « Distinguishability of Conductivities by Electric Current Computed Tomography », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **5**, n° 2, pages 91–95.
- [Jaynes draft] E. T. Jaynes (draft), *Probability theory – The logic of science*, Washington University, St Louis MO 63130, (forthcoming).
- [Kardestuncer et coll. 1987] H. Kardestuncer, D. H. Norrie et F. Brezzi (1987), *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill Book Company, 1221 Avenue of the Americas, New York, NY 10020.
- [Kohn et McKenney 1990] R. V. Kohn et A. McKenney (1990), « Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography », *Inverse Problems*, pages 389–414.
- [Kohn et Vogelius 1984] R. V. Kohn et M. Vogelius (1984), « Determining conductivity by boundary measurements », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **37**, pages 113–123.
- [Künsch 1994] H. R. Künsch (1994), « Robust priors for smoothing and image restoration », *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, **46**, n° 1, pages 1–19.
- [Lang 1986] S. W. Lang (1986), « Performance Bounds for an Inverse Resistivity Problem », *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **24**, n° 2, pages 191–197.
- [Lascaux et Theodor 1987] P. Lascaux et R. Theodor (1987), *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, volume 2, Masson, Paris.
- [Li et Huang 1995] S. Z. Li et J. S. F. Huang (1995), « Convex MRF potential functions », dans *Proceedings of IEEE ICIP*, volume 2, pages 296–299, 1995.
- [Luenberger 1969] D. Luenberger (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, J., New York, 1 edition.
- [Marchouk et Agochkov 1981] G. Marchouk et V. Agochkov (1981), *Introduction aux méthodes des éléments finis*, Mir.
- [Marroquin et coll. 1987] J. Marroquin, S. Mitter et T. Poggio (1987), « Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision », *J. Amer. Stat. Assoc.*, **82**, pages 76–89.

- [Marsili et coll. 1992] P.-M. Marsili, W.-W. Dai et J.-P. Morucci (1992), «Using boundary element method in a layer stripping reconstruction algorithm for impedance imaging», dans *Proceedings of the 14th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 1696–1697, Paris, France.
- [Martin 1993] T. Martin (1993), «Relaxation déterministe et champ markovien en problèmes inverses», Rapport technique, stage de DEA, Université de Paris-Sud.
- [Martin et Idier 1995] T. Martin et J. Idier (1995), «Problème mal posé et reconstruction bayésienne en tomographie d'impédance électrique», dans *Actes du 15^e Colloque GRETSI*, pages 905–908, Juan-les-Pins, France.
- [Martin et Idier 1996] T. Martin et J. Idier (1996), «A Bayesian non-linear inverse approach for electrical impedance tomography», dans *2nd International Conference on Inverse Problems in Engineering*, Le Croisic, France.
- [Mead 1967] R. Mead (1967), «A mathematical model for the estimation of interplant competition», *Biometrics*, **23**, pages 189–205.
- [Mendel 1983] J. M. Mendel (1983), «Optimal Seismic Deconvolution», *New-York: Academic*.
- [Metropolis et coll. 1953] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller et E. Teller (1953), «Equations of state calculations by fast computing machines», *Journal of chemical physics*, **21**, pages 1087–1092.
- [Mirabel et Marsili 1996] X. Mirabel et P.-M. Marsili (1996), «Electrical Impedance Tomography: Iterative algorithm using a non-linear approximation», dans *2nd Intern. Conf. Inverse Problems in Engng.*, Le Croisic, France.
- [Mohammad-Djafari et Demoment 1988] A. Mohammad-Djafari et G. Demoment (1988), «Maximum entropy reconstruction in X ray and diffraction tomography», *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **MI-7**, n° 4, pages 345–354.
- [Murai et Kagawa 1985] T. Murai et Y. Kagawa (1985), «Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Element Model», *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **32**, n° 3, pages 177–184.
- [Nashed 1981] M. Nashed (1981), «Operator-theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna theory», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **29**, pages 220–231.
- [Nedelec 1991] J. Nedelec (1991), *Notions sur les techniques d'éléments finis*, Ellipses.
- [Nikolova 1995] M. Nikolova (1995), *Inversion markovienne de problèmes linéaires mal posés. application à l'imagerie tomographique.*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.
- [Phillips 1962] D. Phillips (1962), «A technique for the numerical solution of certain integral equation of the first kind», *J. Ass. Comput. Mach.*, **9**, pages 84–97.

- [Press et coll. 1986] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky et W. Vetterling (1986), *Numerical recipes*, Cambridge University Press.
- [Price 1979] L. R. Price (1979), « Electrical Impedance Computed Tomography (ICT): a new CT Technique », *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, **26**, n° 2, pages 2736–2739.
- [Renardy et Rogers 1993] M. Renardy et R. Rogers (1993), *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag.
- [Robert 1992] C. Robert (1992), *L'analyse statistique Bayésienne*, Economica.
- [Santosa et Vogelius 1990] F. Santosa et M. Vogelius (1990), « A backprojection algorithm for electrical impedance imaging », *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **50**, n° 1, pages 216–243.
- [Seagar et Bates 1985] A. Seagar et R. Bates (1985), « Full-wave computed tomography. Part 4: Low frequency electric current C.T. », *Proceedings of the IEE*, **132A**, n° 7, pages 455–466.
- [Somersalo et coll. 1991] E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson et E. Isaacson (1991), « Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging », *Inverse Problems*, pages 899–926.
- [Strang et Fix 1973] G. Strang et G. Fix (1973), *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall.
- [Sylvester et Uhlmann 1987] J. Sylvester et G. Uhlmann (1987), « A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem », *Ann. Math.*, **125**, pages 153–169.
- [Tanner et Wong 1987] M. A. Tanner et W. H. Wong (1987), « The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation », *Journal of American Statistical Association*, **82**, n° 398, pages 528–540.
- [Tarantola et Valette 1982] A. Tarantola et B. Valette (1982), « Inverse Problems = Quest for Information », *Journal of Geophysics*, **50**, pages 159–170.
- [Tasto et Schomberg 1978] M. Tasto et H. Schomberg (1978), « Object reconstruction from projections and some non-linear extensions », *Pattern Recognition and Signal Processing (ed. C. H. Chen)*, pages 485–503.
- [Tikhonov et Arsenin 1977] A. Tikhonov et V. Arsenin (1977), *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington DC.
- [Twomey 1962] S. Twomey (1962), « On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature », *J. Assoc. Comp. Mach.*, **10**, pages 97–101.
- [Walter et Pronzato 1994] E. Walter et L. Pronzato (1994), *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*, Masson, Paris.

- [Webster 1990] J. Webster (1990), *Electrical Impedance Tomography*, Adam Hilger, IOP Publishing Ltd.
- [Wexler et coll. 1985] A. Wexler, B. Fry et M. Neuman (1985), « Impedance-computed tomography algorithm and system », *Applied Optics*, **24**, n° 23, pages 3985–3992.
- [Winkler 1995] G. Winkler (1995), *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*, Springer Verlag, P.O. Box 31 13 40, D-10643 Berlin, Germany.
- [Woo et coll. 1992] E. J. Woo, P. Hua, J. G. Webster et W. J. Tompkins (1992), « Measuring Lung Resistivity Using Electrical Impedance Tomography », *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **39**, n° 7, pages 756–760.
- [Woo et coll. 1993] E. J. Woo, P. Hua, J. G. Webster et W. J. Tompkins (1993), « A Robust Image Reconstruction Algorithm and Its Parallel Implementation in Electrical Impedance Tomography », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **12**, n° 2, pages 137–146.
- [Yorkey et coll. 1987] T. Yorkey, G. Webster et W. Tompkins (1987), « Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography », *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, pages 843–852.
- [Zgainski et coll. 1997] F. X. Zgainski, Y. Maréchal, J. Coulomb et P. Thomas (1997), « Un critère de qualité généraliste *a priori* pour le maillage dans la méthode des éléments finis », dans *Numélec'97: seconde conférence européenne sur les méthodes numérique en électromagnétisme*, pages 100–101, École centrale de Lyon.
- [Zienkiewicz et Taylor 1989] O. Zienkiewicz et R. Taylor (1989), *The Finite Element Method*, volume 1, McGraw-Hill Book Company.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Avant-propos | 1 |
| 1 Introduction | 1 |
| 2 Contexte historique | 1 |
| 3 Cadre scientifique et motivations de l'étude | 3 |
| 4 Expérience de tomographie d'impédance électrique | 4 |
| 5 Plan de l'étude | 5 |
| | |
| I Formalisation du problème inverse de tomographie d'impédance électrique | 7 |
| | |
| I Méthodologie de modélisation et d'estimation | 11 |
| 1 Introduction | 11 |
| 2 Modélisation du problème direct | 12 |
| 2.1 Les différents étages de la modélisation | 13 |
| 2.2 Pondération des erreurs de modélisation | 16 |
| 3 Résolution du problème inverse | 19 |
| 3.1 Méthodes d'estimation non régularisées | 19 |
| 3.2 Caractère mal posé du problème inverse | 21 |
| 3.2.1 Fondements mathématiques | 21 |
| 3.2.2 Algorithmes utilisés lors de la mise en œuvre de l'estimation | 22 |
| 3.2.3 Causes d'instabilité algorithmique | 24 |
| 3.3 Régularisation du problème inverse | 25 |
| 3.4 Choix de la loi <i>a priori</i> pour l'estimation | 29 |
| 3.4.1 Détermination d'une paramétrisation <i>pertinente</i> | 29 |
| 3.4.1.1 Changement de <i>variable aléatoire</i> | 30 |
| 3.4.1.2 Changement de paramètre dans la densité | 30 |
| 3.4.2 Utilisation de loi <i>a priori</i> markoviennes | 32 |
| 3.4.3 Choix d'une fonction de potentiel | 36 |
| 3.4.3.1 Homogénéité | 36 |
| 3.4.3.2 Convexité | 36 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 3.5 | Choix des hyperparamètres | 39 |
| II | Modèle analytique du problème de TIÉ | 41 |
| 1 | Introduction | 41 |
| 2 | Conventions | 41 |
| 3 | Équations de la physique du problème | 42 |
| 4 | Modèle électrique différentiel du problème direct | 44 |
| 5 | Modèle électrique variationnel ou intégral | 46 |
| 5.1 | Principe de la formulation variationnelle | 46 |
| 5.2 | Propriétés de la solution du problème direct | 48 |
| 5.3 | Propriétés de la solution du problème inverse | 50 |
| 6 | Annexe : exemples de solutions analytiques | 51 |
| 6.1 | Domaine Ω carré et conductivité σ uniforme | 51 |
| 6.2 | Ω circulaire, σ en chapeau | 53 |
| III | Résolution du problème direct par la MÉF | 55 |
| 1 | Introduction | 55 |
| 2 | Modélisation numérique des mesures de courant et de tension | 56 |
| 3 | Modèles approchés existants en TIÉ | 57 |
| 3.1 | Les méthodes <i>analytiques</i> | 57 |
| 3.2 | Les méthodes <i>discrètes</i> | 58 |
| 3.3 | Les méthodes <i>mixtes</i> | 59 |
| 4 | Approximation discrète de la formulation variationnelle par la MÉF | 60 |
| 4.1 | Choix de la structure MÉF | 60 |
| 4.2 | Choix de l'ordre des fonctions de base et du type de maillage | 61 |
| 4.3 | Introduction de coordonnées triangulaires | 64 |
| 4.4 | Écriture de l'approximation | 66 |
| 4.4.1 | Écriture algébrique | 66 |
| 4.4.2 | Forme compacte de la discrétisation | 68 |
| 5 | Résolutions MÉF du problème direct | 71 |
| 6 | Stabilité numérique, convergence et précision des modèles directs | 75 |
| 6.1 | Étude de la stabilité numérique (erreurs d'arrondi) | 75 |
| 6.2 | Propriété de convergence et étude de l'erreur de résolution | 79 |
| 7 | Conclusion : choix du modèle MÉF et choix des entrées | 85 |
| 8 | Annexe | 87 |
| 8.1 | Démonstration de la propriété III.1 | 87 |
| 8.2 | Démonstration de la propriété III.2 | 88 |
| 8.3 | Démonstration du théorème III.1 | 91 |

II Résolution du problème inverse de tomographie d'impédance électrique : méthodes et mise en œuvre 95

IV Résolution MAP du problème inverse de TIÉ 99

| | | |
|-----|---|-----|
| 1 | Présentation des méthodes existantes | 99 |
| 2 | Estimation MAP de la log-conductivité | 103 |
| 2.1 | Choix de la log-conductivité pour la reconstruction | 103 |
| 2.2 | Modèle direct MÉF non linéaire | 104 |
| 2.3 | Loi <i>a priori</i> markovienne sur les différences pour le MAP | 105 |
| 3 | Mise en œuvre du MAP | 106 |
| 3.1 | Simulation haute résolution des observations | 106 |
| 3.2 | Minimisation par <i>gradient pseudo-conjugué</i> (GPC) | 109 |
| 3.3 | Résultats des simulations MAP | 114 |
| 4 | Conclusion | 120 |
| 5 | Annexe : calcul du gradient du critère MAP | 120 |

V Échantillonnage stochastique et bilinéarité 123

| | | |
|-------|---|-----|
| 1 | Introduction | 123 |
| 2 | Résolution bayésienne de problèmes inverses bilinéaires | 124 |
| 2.1 | L'échantillonneur de Gibbs (EG) | 125 |
| 2.2 | Illustration par un exemple à deux variables | 127 |
| 3 | Échantillonnage bilinéaire sous contrainte | 129 |
| 3.1 | Problème de TIÉ vu sous forme bilinéaire contrainte | 129 |
| 3.2 | Exemple bivarié de relaxation d'une contrainte bilinéaire | 131 |
| 3.3 | Principe de l'échantillonnage pondéré | 133 |
| 3.4 | Résultats de l'échantillonnage pondéré pour l'exemple bivarié | 134 |
| 4 | Estimation MP-EGP en TIÉ | 140 |
| 4.1 | Choix et écriture des densités | 140 |
| 4.2 | Stratégie de balayage et formules de mises à jour | 143 |
| 4.2.1 | Tirage des v_n^k et mise à jour des \mathbf{M}_{v^k} | 143 |
| 4.2.2 | Tirage des γ_p et mise à jour de $\mathbf{A}_{\text{exp}\gamma}$ | 144 |
| 4.2.3 | Pondération des échantillons | 146 |
| 5 | Conclusion | 147 |
| 6 | Annexe | 148 |
| 6.1 | Écriture des matrices \mathbf{M}_v et \mathbf{A}_σ | 148 |
| 6.2 | Tirage par la méthode de réjection | 149 |

Conclusion 153

| | |
|---------------------------|------------|
| Bibliographie | 155 |
| Table des matières | 165 |

NOM : MARTIN

Prénom : Thierry

Titre : Inversion bayésienne du problème non linéaire de tomographie d'impédance électrique modélisé par une méthode d'éléments finis.

Title : Bayesian resolution of the non linear inverse problem of Electrical Impedance Tomography with Finite Element modeling.

Résumé : L'estimation de distributions de résistivité, connue sous le nom de *tomographie d'impédance électrique* (TIÉ), est un problème inverse non linéaire et mal posé. Pour formuler le problème direct, il est nécessaire, dans le cas général, d'utiliser une approximation car l'équation aux dérivées partielles régissant l'expérience ne possède pas de solution explicite. L'emploi de la méthode des éléments finis (MÉF) nous permet de concevoir, pour une faible charge de calcul, un modèle direct qui, non seulement préserve le caractère non linéaire du phénomène mais possède également une précision suffisante pour l'inversion. Nous opérons une régularisation dans le cadre bayésien en introduisant des lois *a priori* markoviennes sur la *log-conductivité*. Le système de voisinage de ces lois est construit directement à partir du maillage triangulaire adopté pour la MÉF. Nous proposons d'abord une estimation du *maximum a posteriori* (MAP) de la densité obtenue avec une loi *a priori* Huber-Markov qui favorise des reconstructions douces tout en autorisant des discontinuités locales. Le critère résultant est minimisé par la méthode du *gradient pseudo-conjugué*. Par rapport aux méthodes préexistantes, les simulations montrent de nettes améliorations des estimations sur les plans de la robustesse au bruit, de la rapidité d'exécution ainsi que la capacité à restaurer des distributions contrastées et discontinues. Nous présentons ensuite le problème de TIÉ sous une forme bilinéaire contrainte. Exploitant cette propriété ainsi que le caractère très creux de la modélisation MÉF, nous proposons une méthode stochastique d'estimation de la moyenne *a posteriori* (MP) de la *log-conductivité*. La moyenne des points obtenus par échantillonnage de Gibbs d'une fonction d'importance, corrigée par une pondération bien choisie, converge vers l'espérance recherchée.

Abstract : Resistivity distribution estimation, widely known as Electrical Impedance Tomography (EIT), is a non linear ill-posed inverse problem. However, the partial derivative equation ruling this experiment yields no analytical solution for arbitrary conductivity distribution. Thus, solving the forward problem requires an approximation. The Finite Element Method (FEM) provides us with a computationally cheap forward model which preserves the non linear image-data relation and also reveals sufficiently accurate for the inversion. Within the Bayesian approach, Markovian priors on the *log-conductivity distribution* are introduced for regularization. The neighborhood system is directly derived from the FEM triangular mesh structure. We first propose a *maximum a posteriori* (MAP) estimation with a Huber-Markov prior which favours smooth distributions while preserving locally discontinuous features. The resulting criterion is minimized with the *pseudo-conjugate gradient* method. Simulation results reveal significant improvements in terms of robustness to noise, computation rapidity and ability to estimate discontinuous and highly contrasted distribution. Then, we give a constrained bilinear presentation of the EIT problem. Taking advantage of such a structure as well as the high sparsity of the MEF modeling, we propose a stochastic estimation method of the *log-conductivity posterior mean* (PM). Actually, the sought expectation is obtained from the convergence of a Gibbs sampled cloud of points that are averaged with an Importance Sampling weighting.

Mots clefs : Tomographie d'impédance électrique, éléments finis, *maximum a posteriori*, champ de Markov, gradient conjugué, bilinéarité, échantillonneur de Gibbs, échantillonnage pondéré.

Keywords : Electrical Impedance Tomography, Finite Element Method, *maximum a posteriori*, Markov Random Field, conjugate gradient, bilinearity, Gibbs Sampler, Importance Sampling.